Introducción a las ecuaciones diferenciales

Jesús Hernández Trujillo
Facultad de Química, UNAM

Agosto de 2023

Definición

Una ecuación diferencial (ED) es aquella que contiene derivadas de una función desconocida.

Ejemplos:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(2\pi x)$ $\quad y = y(x)$
2. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$ $\quad x = x(t)$, m y k constantes
3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}$ $\quad u = u(x, y, z)$, ε_0 constante

¿Cómo se obtienen las funciones

$$y(x),\ x(t), y\ u(x, y, z)$$

de estos ejemplos?

Clasificación

ED ordinaria: La función desconocida depende de una sola variable.

Ejemplo:

$$F(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$ *Segunda ley de Newton*

ED parcial: La función desconocida depende de dos o más variables.

Ejemplo:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$ *Ecuación de onda clásica*

Una ED ordinaria se puede escribir en la forma:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

Ejemplo:

$$3y'' - y - 2x = 0$$

Orden de una ED: El orden de la mayor derivada en la ED.

Grado de una ED: El grado algebráico de la derivada de mayor orden en la ED.

Ejercicios:

Expresa el orden y el grado de las siguientes EDs.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$
2. $\dfrac{d^2u(t)}{dt^2} = -x^2$
3. $\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3\right]^{3/2} = 8\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2$
4. $x^2\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3y^4\dfrac{dy}{dx} = 0$

La **solución** de una ED ordinaria es una función

$$\boldsymbol{y = \phi(x)} \tag{2}$$

que la satisface (es decir, la cumple).

La solución de una ED también puede expresarse de manera implícita:

$$\boldsymbol{g(x, \phi) = 0} \tag{3}$$

En el caso de una ED ordinaria, al sustituir $\boldsymbol{y = \phi(x)}$ en (1) se obtiene una identidad:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0} \\ \boldsymbol{0 = 0} \end{aligned}$$

Ejemplos:

4. La función $\boldsymbol{y = (x+1)e^{-x}}$ está expresada en forma explícita y es solución de
$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}}$$

5. La función $\boldsymbol{3x^2 + 2y^3 - 2 = 0}$ está expresada en forma implícita. Mediante la regla de la cadena, es posible obtener la ecuación diferencial:
$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y^2}}$$
¿Es posible escribir la solución en forma explícita?

Ejercicios:

5. Verifica si las funciones indicadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales.
   1) $y'' - y' - 6y = 0$, $y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = e^{3x}$.
   2) $(y')^3 - 4xy\,y' + 8y^2 = 0$, $y(x) = c(x-c)^2$. **tarea**
   3) $xy' + y + x^4y^4e^x = 0$, , $y^{-3} = x^3(3e^x - 2)$.

6. Encuentra r para que $y(x) = e^{rx}$ sea solución de $y'' + 2y' + 10y = 0$.

7. Encuentra r para que $y(x) = x^r$ sea solución de $x^2y'' + 6xy' + 4y = 0$.

Ejercicios:

8. Escribe una ecuación diferencial de la forma $dy/dx = f(x, y)$ cuya solución $y = g(x)$ tiene la propiedad indicada.
   1) La pendiente de la gráfica de $g(x)$ en el punto $P(x, y)$ es la suma de x y y.
   2) La recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto $P(x, y)$ intersecta al eje x en el punto $Q(x/2, 0)$. **Tarea**

Ejemplos:

6. $x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + c_1 t + c_2$ es solución de

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -g$$

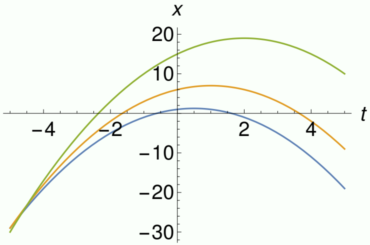
7. $y = \operatorname{sen} x + c$ es solución de

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

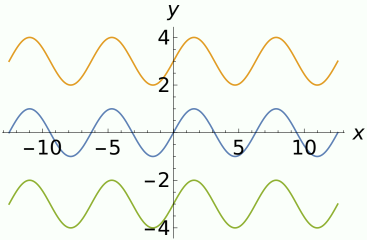
$\{c_i\} \Rightarrow$ **parámetros o constantes de integración**

Gráficamente, se obtienen familias de **curvas integrales**.

Ejemplo 6



Ejemplo 7



Solución particular: Se obtiene imponiendo condiciones para asignar valores a las constantes de integración.

La ED ordinaria

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

con las **condiciones iniciales**

$$y_0 = y(x_0),\ y_0' = y'(x_0),\ \ldots,\ y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0)$$

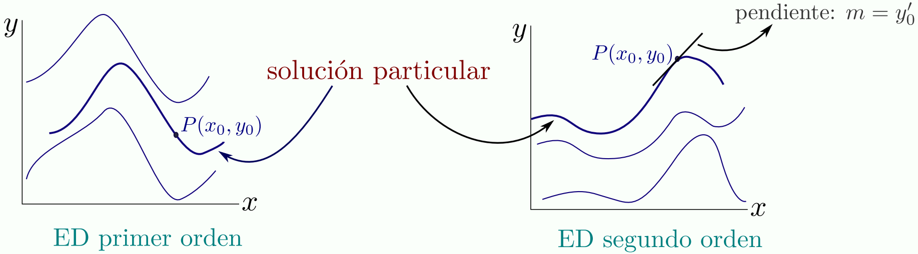
conduce a una solución partícular.

- ED de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y_0 = y(x_0)$$

- ED de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y), \qquad y_0 = y(x_0); y_0' = y'(x_0)$$



Ejemplo:

8. La ED para el movimiento de una partícula en un campo gravitacional,

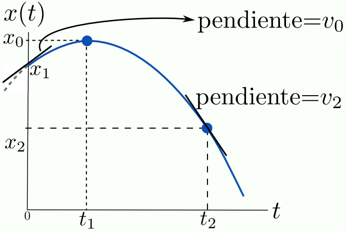
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

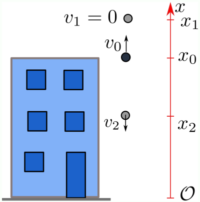
y las condiciones iniciales

$$x_0 = x(0), \quad v_0 = v(0) = \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

conducen a

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0$$





Ejercicios:

9. Encuentra las EDs que tienen las siguientes soluciones generales.
   1) $y = x^3 + \cos x + c$.
   2) $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x)$.
   3) El sistema de circunferencias con centro en $P(0,0)$. (solución implícita).

10. Verifica que $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ es solución de $y'' - 3y' + 2y = 0$ y encuentra las constantes c_1 y c_2 tales que $y(0) = 1$ y $y'(0) = -1$.

Clasificación de EDs ordinarias

Lineales de orden n. Son de la forma:

$$\mathcal{L}^n y(x) = g(x) \tag{4}$$

donde

$$\mathcal{L}^n = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_0(x) \tag{5}$$

es el **operador diferencial lineal de orden n**.

La ec. (4) se puede escribir como:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_0(x)y = g(x) \tag{6}$$

No lineales. Las que no tienen la forma de la ec. (4).

⇒ Con frecuencia, las EDs no lineales son difíciles o imposibles de resolver analíticamente.

Identifica cuáles de las siguientes EDs son lineales.

1. $x^2 d^2 y/dx^2 + xdy/dx + 2y = \operatorname{sen} x$.
2. $(1 + y)d^2 y/dt^2 + tdy/dt + y = \ln t$.
3. $yy' + x = 0$.

Una **ED lineal homogénea** es de la forma

$$\mathcal{L}^n y = 0 \tag{7}$$

Explícitamente:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_0(x)y = 0 \tag{8}$$

tiene la solución general

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \tag{9}$$

Adicionalmente, las funciones

$$\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$$

son linealmente independientes; cada una de ellas satisface (7).

Es decir:

$$\mathcal{L}^n y_1(x) = 0, \mathcal{L}^n y_2(x) = 0, \ldots, \mathcal{L}^n y_n(x) = 0$$

Por lo tanto, dado que $\mathcal{L}^n$ es un operador lineal:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n y_h(x) &= \mathcal{L}^n[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)] \\
&= c_1 \mathcal{L}^n y_1(x) + c_2 \mathcal{L}^n y_2(x) + \ldots + c_n \mathcal{L}^n y_n(x) \\
&= c_1(0) + c_2(0) + \ldots + c_n(0) = 0
\end{aligned}$$

Sea $\boldsymbol{y_p(x)}$ una solución distinta a $\boldsymbol{y_h(x)}$ que satisface la ED lineal no homogenea, (6):

$$\mathcal{L}^n y_p(x) = g(x)$$

Al aplicar el operador $\mathcal{L}^n$ a la función $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n y(x) &= \mathcal{L}^n[y_h(x) + y_p(x)] \\ &= \mathcal{L}^n y_h(x) + \mathcal{L}^n y_p(x) \\ &= 0 + g(x) = g(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general de la **ED lineal no homogénea** [ec. (6): $\mathcal{L}^n y = g(x)$] es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{10}$$

donde $\boldsymbol{y_h(x)}$ está dada por la ec. (9).

$\Rightarrow$ *Para resolver (6) primero hay que resolver (7)*; después, encontrar $\boldsymbol{y_p(x)}$.

Ejercicios:

12. Verifica que la solución dada satisface la ED correspondiente. Identifica $y_h(x)$ y $y_p(x)$ en cada caso.

    1) $y(x) = c_1 e^{\sqrt{3}\imath x} + c_2 e^{-\sqrt{3}\imath x} - \operatorname{sen} 2x$, donde $\imath = \sqrt{-1}$; $d^2y/dx^2 + 3y = \operatorname{sen} 2x$.

    2) $y(t) = c_1 + c_2/t + t/2$; $t^2 d^2y/dt^2 + 2t dy/dt = t$. **(tarea)**

Existencia y unicidad de las soluciones de EDs ordinarias de 1er orden

Teorema: El problema de valor inicial de 1er. orden (no necesariamente lineal):

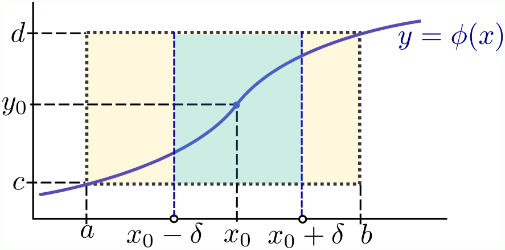
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y_0 = y(x_0) \tag{11}$$

tiene solución única, $y = \phi(x)$, si f y $\partial f / \partial y$ son continuas en

$$\{(x, y) | a < x < b, c < y < d\}$$

que contiene a $P(x_0, y_0)$ en un intervalo

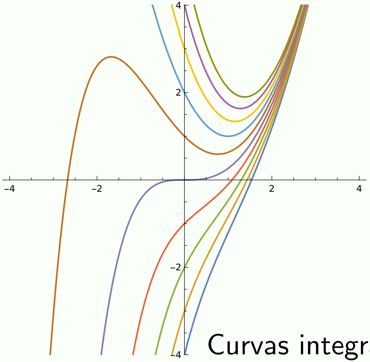
$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \quad \delta > 0.$$



Ejercicios:

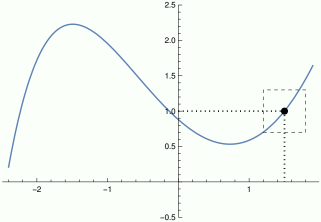
Evalúa la unicidad de las soluciones en los casos siguientes

16. $\boldsymbol{dy/dx = x^2 - y, \quad y(1.5) = 1}$.



Curvas integrales

$$\boldsymbol{y = x^2 - 2x + ce^{-x} + 2}$$



Solución particular:

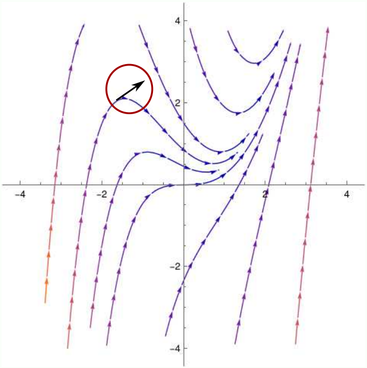
$$\boldsymbol{y = x^2 - 2x - 1.120e^{-x} + 2}$$

Sí hay solución única en $\boldsymbol{P(1{,}5, 0)}$

Ejercicios:

Evalúa la unicidad de las soluciones en los casos siguientes

16. $dy/dx = x^2 - y, \quad y(1.5) = 1$.



- $f(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a $y = y(x)$ en $P(x_0, y_0)$.
- Las gráficas de las pendientes se llaman **campos direccionales**.

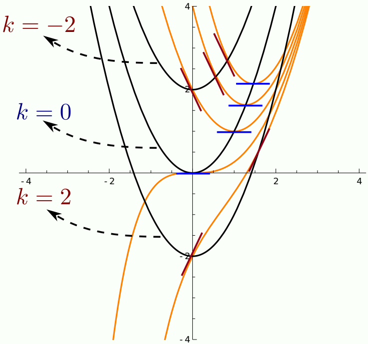
Por ejemplo:

punto	pendiente
$(0, 0)$	$0^2 - 0 = 0$
$(0, 1.8)$	$0^2 - 1.8 = -1.8$
$(1.5, 1)$	$1.5^2 - 1 = 1.25$

Ejercicios:

Evalúa la unicidad de las soluciones en los casos siguientes

16. $dy/dx = x^2 - y, \quad y(1.5) = 1$.



Las curvas

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = k$$

se llaman isóclinas.

En este caso, se trata de parábolas:

$$y = x^2 - k$$

17. $y\,dy/dx = x$ en los siguientes casos:

(a) $y(0) = 0$, (b) $y(0) = 1$.

La solución de la ED es $y^2 - x^2 = c$.

Campo direccional: