Equilibrio y Cinética: Series de Taylor

Prof. Jesús Hernández Trujillo   Facultad de Química, UNAM

La expansión en series de Taylor de la función $y = f(x)$ alrededor del punto $x = x_o$ es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right)_{x=x_0} [x - x_0]^n$$

La serie puede ser convergente o converger más rápidamente cuando $x - x_0$ es pequeño. Si $x_0 = 0$, se llama serie de McLaurin:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right)_{x=0} x^n = f(0) + f'(0)\, x + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2 + \ldots$$

En el primer término después de la suma, se utilizó $0! = 1$.

Cuando se incluyen en la expansión solo los términos hasta el que tiene la derivada de orden m se dice que la serie se ha truncado a ese orden:

$$f(x) \approx f_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right)_{x=x_0} [x - x_0]^n = f(0) + f'(0)\, x + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2 + \ldots + (d^m f / dx^m)|_{x_0}\, x^m$$

Ejemplo: Realiza la expansión de la función $f(x) = e^x$ en series de McLaurin.

En este caso, la expansión se realiza alrededor de $x_0 = 0$:

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = e^0 = 1, \quad f''(0) = e^0 = 1, \ldots$$

Por lo tanto:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \ldots$$

Es posible expresar a e^x en notación de suma al sustituir cada derivada evaluada en $x_0 = 0$ por el valor 1 en la serie de McLaurin:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

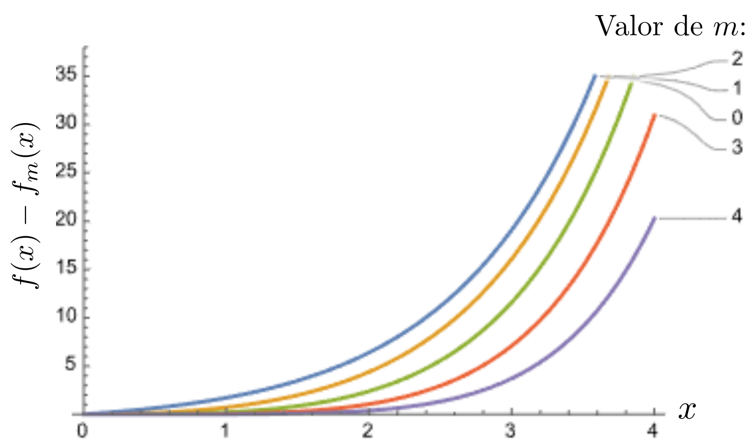
También es ilustrativo calcular el valor de esta función en algunos casos particulares. Por ejemplo, se puede hacer la expansión de $f(0.05)$ y $f(0.5)$ en series de McLaurin. A seis cifras, los valores son:

$$e^{0.05} = 1.051271 \quad \text{y} \quad e^{0.5} = 1.648721.$$

En la siguiente tabla, se ilustra el truncamiento de la serie a diversos órdenes en cada cada caso:

	$x = 0.05$		$x = 0.5$	
orden	valor aprox.	error	valor aprox.	error
0	1	0.051271	1	0.648721
1	1.05	0.001271	1.5	0.148721
2	1.05125	0.000021	1.625	0.023721
3	1.051271	0.000000	1.645833	0.002888
4	1.051271	0.000000	1.648437	0.000284

Se observa que la expansión funciona mejor para $x = 0.05$ porque está más cerca del punto de expansión, $x_0 = 0$. La siguiente figura proporciona un panorama más amplio del efecto de truncar la serie de la función exponencial.



Ejercicio: Verifica que la expansión de la función $f(x) = \ln(1 - x)$ en series de McLaurin es

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$