Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

Jesús Hernández Trujillo
Facultad de Química, UNAM

Octubre de 2023

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Una ED de segundo orden es de la forma

$$f(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

donde $y = y(x)$.

⇒ La solución general de una ED de segundo orden (lineal o no lineal) involucra dos constantes de integración.

Ejemplo:

$$y'' - g(x) = 0$$

En este caso:

$$\begin{aligned} y'' &= g(x) \\ y'(x) &= \int g(x)\, dx = p(x) + c_1 \\ y(x) &= \int [p(x) + c_1]\, dx = q(x) + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

En situaciones específicas, es posible reducir una ED de segundo orden a una de primer orden.

<u>Ejemplos:</u>

1. $y'' = f(x, y')$. La sustitución $v = y'$ conduce a $v' = y''$.

Por lo tanto:

$$v' = f(x, v).$$

Al resolver la ED de primer orden se obtiene v. Al integrar v,

$$v = \frac{dy}{dx},$$

se llega a la solución deseada, $y = y(x)$.

2. $y'' = f(y, y')$**.** La sustitución $v = y'$ conduce a

$$v' = f(y, v), \text{ donde } y = y(x)$$

Mediante derivación implícita:

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = y'\frac{dv}{dy} = v\frac{dv}{dy}$$

Se obtiene la ED de primer orden

$$v\frac{dv}{dy} = f(y, v)$$

donde y es la variable independiente.

Al integrar el resultado de la ED de primer orden, se llega a la solución deseada, $y = y(x)$.

Ecuación diferencial lineal de segundo orden

ED linear ordinaria de segundo orden:

$$\mathcal{L}^2 y(x) = g(x) \tag{2}$$

donde

$$\mathcal{L}^2 = a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x) \tag{3}$$

es el operador diferencial lineal de orden 2.

La ec. (2) se puede escribir como:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{4}$$

La solución de ec. (2) es de la forma

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{5}$$

ED lineal ordinaria de segundo orden homogénea:

$$\mathcal{L}^2 y(x) = 0 \tag{6}$$

La ec. (6) se puede escribir como:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{7}$$

El espacio de soluciones de la ED homogénea es de dimensión 2 y es de la forma

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{8}$$

Principio de superposición:

Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de (7), entonces, debido a (8), $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ también lo es.

Conjunto fundamental:

Cuando $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de (7), forman un conjunto fundamental.

Esto significa que

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad c_1 = 0 \quad \& \quad c_2 = 0$$

- No es posible expresar a una solución en términos de la otra.

  Ejemplo:

$\Rightarrow$ $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son linealmente independientes; 1, $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ no lo son.

Por lo tanto:

- Una base $\{y_1(x), y_2(x)\}$ del espacio de soluciones de la ED homogénea es un conjunto fundamental.

Sean las condiciones iniciales

$$\phi(x_0) = \phi_0, \quad \phi'(x_0) = \phi'_0$$

para la ED homogénea. A partir de (8):

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= \phi(x_0) \\ c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) &= \phi'(x_0) \end{aligned}$$

Las constantes $\{c_1, c_2\}$ se obtiene la resolver este sistema de ecuaciones.

LA ED lineal homogénea tiene solución única cuando

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \forall x_0 \in I \tag{9}$$

$\Rightarrow$ Cualquier solución de (7) se puede expresar como (8).

*El **Wronskiano*** de $y_1(x)$ y $y_2(x)$ se define como

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \tag{10}$$

El Wronskiano de un conjunto $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ es

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{n-1}(x) & f_2^{n-1}(x) & \cdots & f_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} \tag{11}$$

Teorema:

Sean $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ soluciones linealmente independientes de la ED $\mathcal{L}^n y = 0$ en un intervalo I. Entonces, el conjunto de soluciones es linealmente independiente en I si y solo si $W(y, 1, y2, \ldots, y_n) \neq 0 \, \forall x \in I$.

- W es una función de x.

Teorema:

$W(y_1, y_2)$ *está dado por*

$$W(y_1, y_2) = c \exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\, dx\right] \tag{12}$$

(Fórmula de Abel)

- Nota que W es igual a cero o no lo es $\forall x \in I$.

Ejercicio: Demuestra este teorema.

Método de los coeficientes indeterminados:

La ED con coeficientes constantes

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a(x)y = g(x) \tag{13}$$

donde

$$g(x) = e^{\alpha x} p_n(x)(A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x) \tag{14}$$

y $p_n(x)$ es un polinimio de grado n, tiene una solución que incluye términos de este tipo.

La forma de $y_p(x)$ en la ec. (5) es de la forma dada en la tabla.

$g(x)$	$y_p(x)$
$p_n(x)$	$x^s q_n(x)$
$e^{\alpha x}$	$Ax^s e^{\alpha x}$
$\operatorname{sen}\beta$ o $\cos\beta$	$A\cos\beta x + B\operatorname{sen}\beta x$

- s es la multiplicidad de la raíz de la ecuación característica cuando $g(x)$ incluye términos de $y_h(x)$.
- Si $g(x)$ consiste en productos de la columna 1, $y_p(x)$ consiste en productos de la columna 2.

Algunos casos que ocurren cuando $y_p(x)$ no incluye parte de $y_h(x)$:

TABLE 4.4.1 Trial Particular Solutions

$g(x)$	Form of y_p
1. 1 (any constant)	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. $\sin 4x$	$A \cos 4x + B \sin 4x$
6. $\cos 4x$	$A \cos 4x + B \sin 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. $e^{3x} \sin 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \sin 4x$
11. $5x^2 \sin 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Ex^2 + Fx + G) \sin 4x$
12. $xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + E)e^{3x} \sin 4x$

Tomado de:

D. G. Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, 10th edn., Cengage, 2012.

Método de superposición:

Considera la ED. $\mathcal{L}^2 y = g(x)$ con solución particular y_p:

$$\mathcal{L}^2 y_p = g(x)$$

Sean:

- $g(x) = \sum_{i=1}^{m} g_i(x)$.
- $\mathcal{L}^2 y_{p_i} = g_i(x)$.

Entonces:

$$\mathcal{L}^2 y_p = \sum_{i=1}^{m} g_i(x) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}^2 y_{p_i} = \mathcal{L}^2 \sum_{i=1}^{m} y_{p_i}$$

Por lo tanto:

$$y_p = \sum_{i=1}^{m} y_{p_i}$$

Es decir, es posible descomponer una ED lineal no homogenea en m ecuaciones lineales no homogeneas.