Ecuaciones Diferenciales: Series de potencias

Jesús Hernández Trujillo FQ-UNAM

Noviembre de 2023

Series infinitas

Una **serie infinita** se define como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$$

$\Rightarrow$ Una serie infinita es una suma

Suma parcial:

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_m$$

Ejemplos:

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} = 2^0 + 2^{1/2} + 2^{2/2} + 2^{3/2} + \ldots + 2^{k/2} + \ldots$$

2. Serie geométrica.

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \ldots$$

En este caso:

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} r^n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^m$$

Multiplicar por r:

$$r\, s_m = r + r^2 + \ldots + r^m + r^{m+1}$$

Hacer la resta:

$$s_m - r\, s_m = 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \ldots + \cancel{r^m} - \cancel{r} - \cancel{r^2} - \ldots - \cancel{r^m} - r^{m+1}$$
$$(1-r)s_m = 1 - r^{m+1}$$

Por lo tanto:

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} r^n = \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r}$$

Se puede demostrar que

$$\lim_{m \to \infty} s_m = \frac{1}{1 - r}, \qquad |r| < 1$$

El límite no existe para $|r| \geq 1$.

Es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}, \qquad |r| < 1$$

Por ejemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

3. Serie armónica.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots$$

La m-ésima suma parcial es:

$$\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{m}$$

Se puede demostrar que en este caso

$$\lim_{m\to\infty} s_m$$

no existe.

$\Rightarrow$ Hay series convergentes y series divergentes

Series de potencias

Una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_k(x-x_0)^k + \ldots$$

donde $x, x_0, a_k \in \Re$, se llama una **serie de potencias**.

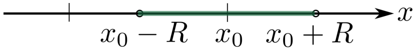
Algunas características

- Convergencia. Sea

  $$s_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_m(x-x_0)^m$$

  La suma converge cuando $\lim_{m\to\infty} s_m(x)$ existe.

- Intervalo de convergencia.
  - ◇ Consiste en los valores de x para los que la serie converge.
  - ◇ x_0 es el centro del intervalo.
- Radio de convergencia, R.
  - ◇ La serie converge para $|x - x_0| < R$
  - ◇ La serie diverge para $|x - x_0| \geq R$
- Si la serie converge para $x \in \Re$, el radio de convergencia es infinito.



Características adicionales de las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m$$

$$k \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} k\, a_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \quad \leftrightarrow \quad a_n = b_n$$

A partir del último caso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = 0 \quad \leftrightarrow c_n = 0$$

Series de Taylor

Representación de una función en series de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$\Rightarrow$ Dados $f(x)$ y x_0, hay que encontrar el conjunto $\{a_n\}$.

Ejercicio:

- Demuestra que

$$a_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f}{dx^k} \right|_{x=x_0}$$

- Serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^n$$

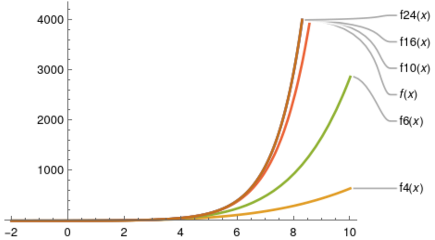
- Serie de McLaurin ($x_0 = 0$)

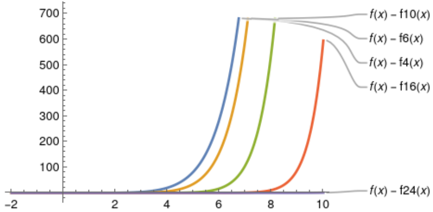
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=0} x^n$$

Ejemplos de series de potencias

$$e^x \approx f_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} x^n$$

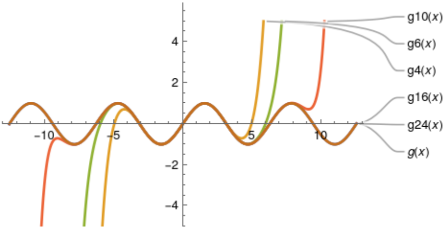
m	$e^{0.5} - f_m(0.5)$	$e^2 - f_m(2)$	$e^9 - f_m(9)$
4	0.000284	0.389056	7657.710000
6	0.000002	0.033501	6427.520000
10	1.276270×10^{-11}	0.000006	2382.400000
16	4.440890×10^{-16}	4.142340×10^{-10}	89.992100
24	4.440890×10^{-16}	2.342910×10^{-18}	0.070117

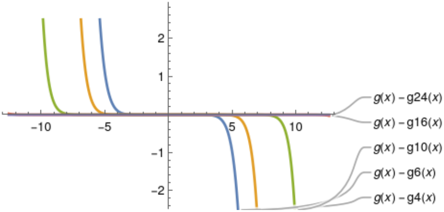




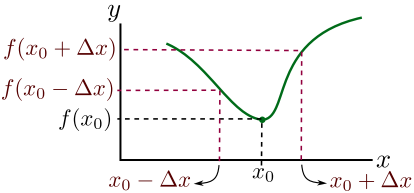
$$\operatorname{sen} x \approx g_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$$

m	$\operatorname{sen}(2) - g_m(2)$	$\operatorname{sen}(9) - g_m(9)$
4	-0.000050	-497.788000
6	-2.469400×10^{-8}	-119.826000
10	$-3.223350 \times 10^{-16}$	-0.301402
16	$-3.315240 \times 10^{-30}$	-2.282810×10^{-7}
24	$-1.449600 \times 10^{-51}$	$-2.904810 \times 10^{-14}$





Máximos y mínimos



Expansión en series a orden 2:

$$f(x) = f(x_0) + \cancelto{0}{f'(x_0)}(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Evaular en $x' = x_0 + \Delta x$:

$$f(x') = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x' - x_0)^2$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(\cancel{x_0} + \Delta x - \cancel{x_0})^2$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(\Delta x)^2$$

Además:

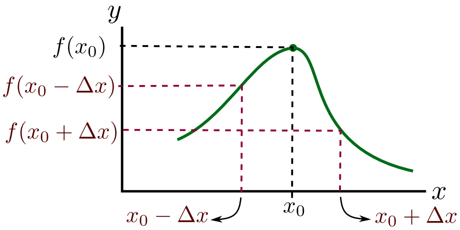
$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(-\Delta x)^2 = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(\Delta x)^2$$

Cuando $f''(x_0) > 0$ se cumple que

$$f(x_0 \pm \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)(\Delta x)^2 > 0$$

por lo tanto, x_0 es un mínimo.

De manera similar:

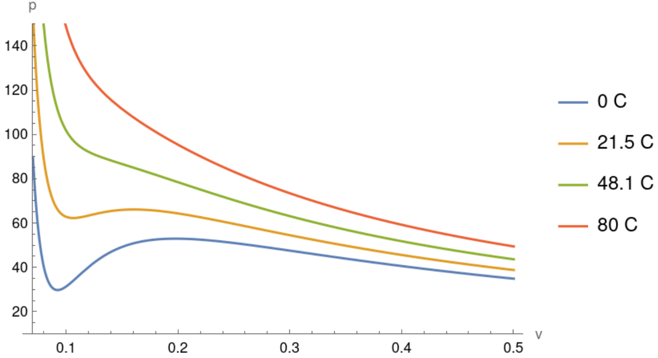


Cuando $f''(x_0) < 0$ se cumple que

$$f(x_0 \pm \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)(\Delta x)^2 < 0$$

por lo tanto, x_0 es un máximo.

Isotermas de CO_2



$\Rightarrow$ *La ecuación del gas ideal sólo funciona bien a presiones bajas y altas temperaturas*

Factor de compresibilidad, Z. Cuantifica las desviaciones respecto al comportamiento de gas ideal:

$$Z = \frac{pv}{RT}, \qquad v = V/n$$

$\Rightarrow v$ es el volumen molar.

Ecuación virial de estado.

$$p = RT\left[\frac{1}{v} + \frac{B(T)}{v^2} + \frac{C(T)}{v^3} + \ldots\right]$$

- Se trata de una serie de potencias de p en $1/v$.
- $B(T), C(T), \ldots$ son los coeficientes viriales.

En este caso:

$$Z = 1 + \frac{B(T)}{v} + \frac{C(T)}{v^2} + \ldots$$

Ejercicio:

- Encuentra $B(T)$ para un gas de van der Waals.

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

Respuesta:

$$B(T) = b - \frac{a}{RT}$$

Nota:

Al definir la naturaleza del gas, se fijan los valores de a y b.

Ecuaciones diferenciales

A partir de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

se obtiene

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

donde

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}, \qquad Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

Algunas definiciones:

Función analítica. Aquella que tiene una serie convergente en un intervalo alrededor de x_0.

Punto ordinario. x_0 es ordinario cuando ambas $P(x_0)$ y $Q(x_0)$ son funciones analíticas.

Punto singular. x_0 es singular cuando alguna o ambas $P(x_0)$ y $Q(x_0)$ es no analítica.

Ejemplo:

- $$xy'' + \frac{x}{1-x}y' + (\operatorname{sen} x)y = 0$$

  En este caso: $$P(x) = \frac{1}{1-x} \qquad Q(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

  $x_0 = 1$ es un punto singular; $x_0 = 0$ es un punto ordinario.

  Por ejemplo: $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

  Además $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$ $$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots$$

Radio de convergencia mínimo:

$$|x - x_0| < R$$

donde R es la distancia mínima de x_0 al punto singular más cercano.

Ejemplos:

1. $(x^2 - 25)y'' + 2xy + y = 0$, $x_0 = 1$. $\quad R = 4$.
2. $(x^2 - 2x + 10)y'' + xy' - 4y = 0$.
    1. $x_0 = 0$. $\quad R = \sqrt{10}$.
    2. $x_0 = 1$. $\quad R = 3$.

Ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell+1)y = 0, \quad \ell = \text{constante} \tag{1}$$

surge en la solución de algunos problemas en coordenadas esféricas, con $x = \cos\theta$.

La solución de (1) por series de potencias alrededor del punto ordinario $x = 0$, involucra la sustitución de

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2}$$

para encontrar al conjunto $\{a_n\}$.

Se obtiene la relación de recurrencia

$$a_{n+2} = -\frac{\ell(\ell+1) - n(n+1)}{(n+2)n+1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

La serie se descompone en potencias pares e impares:

$$y_{\mathrm{par}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}, \qquad y_{\mathrm{impar}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$$

Las soluciones aceptables en las aplicaciones son aquellas donde la constante ℓ es un entero no negativo:

$$\ell = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Por lo tanto, de acuerdo con (3), existe n_{max} tal que

$$\ell(\ell+1) - n_{\mathrm{max}}(n_{\mathrm{max}}+1) = 0$$

por lo que

$$n_{\mathrm{max}} = \ell \tag{5}$$

y

$$a_{n_{\mathrm{max}}+2} = 0 \tag{6}$$

Ejemplos:

$\ell = 0$: $n_{\max} = 0$; $a_2 = a_4 = \ldots = 0$.

$$y_0 = a_0$$

$\ell = 1$: $n_{\max} = 1$; $a_3 = a_5 = \ldots = 0$.

$$y_1 = a_1 x$$

$\ell = 2$: $n_{\max} = 2$;

$$a_2 = -3a_0$$
$$a_4 = a_6 = \ldots = 0$$

Por lo tanto:

$$y_2 = a_0(1 - 3x^2)$$

$\ell = 3$: $n_{\max} = 3$;

$$a_3 = -\frac{5}{3}a_1$$

$$a_5 = a_7 = \ldots = 0$$

Por lo tanto:

$$y_3 = a_1(1 - \frac{5}{3}x^3)$$

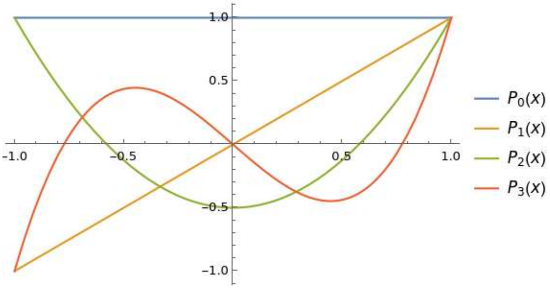
Convencionalmente, los coeficientes se designan mediante

$$a_0 = (-1)^{n/2}\frac{(1)(3)\cdots(n-1)}{(2)(4)\cdots(n)} \tag{7}$$

$$a_1 = (-1)^{(n-1)/2}\frac{(1)(3)\cdots(n)}{(2)(4)\cdots(n-1)} \tag{8}$$

Algunos polinomios de Legendre:

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

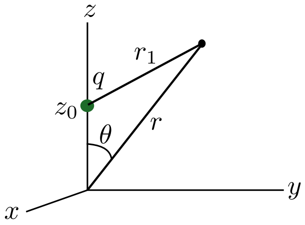


La segunda solución de la ec (1) se obtiene por el método de reducción de orden:

$$Q_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$
$$Q_1 = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1$$

Potencial electrostático

- Debido a una carga puntual.

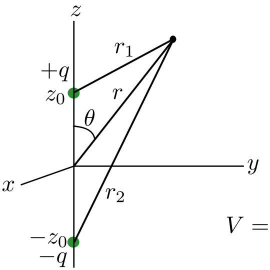


Ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{z_0}{r}\right)^n$$

- Debido a dos cargas puntuales (dipolo).



Ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

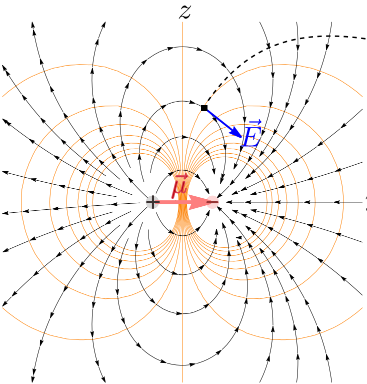
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{z_0}{r}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P_n(\cos\theta)\left(\frac{z_0}{r}\right)^n\right]$$

El primer término:

$$V_1 = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P_1(\cos\theta)}{r^2}, \quad \mu = 2z_0 q$$

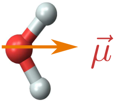
es el potencial del dipolo μ (dominante cuando $r >> z_0$).

Ejemplo en química:



Una carga puntual (p. ej. un ion) experimenta una fuerza

$\vec{F} = q\vec{E} = -q\nabla V_1.$



Referencias

1. E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 9th edition, John Wiley & Sons.
2. J. R. Reitz, F. J. Milford, R. W. Christy, *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, 4a edición, Addison–Wesley Iberoamericana.