Fundamentos de Espectroscopia: Ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes

Prof. Jesús Hernández Trujillo. Facultad de Química, UNAM

1. Métodos de solución

En esta sección se hace una breve descripción de los métodos de solución de ecuaciones diferenciales utilizados en el curso para resolver problemas de movimiento armónico simple, amortiguado y forzado. Para una discusión detallada es necesario recurrir a la bibliografía sobre el tema de ecuaciones diferenciales. Al final, se asigna una serie de ejercicios relacionados.

1.1. Ecuación homogénea de segundo orden

Es de interés estudiar la solución de la ecuación diferencial de segundo orden homogénea con coeficientes constantes:

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0\,, \tag{1}$$

donde $\{a_0, a_1, a_2 \in \Re\}$.

Una solución de (1) es de la forma

$$x = e^{rt} \tag{2}$$

A partir de (2)

$$\frac{dx}{dt} = re^{rt} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = r^2 e^{rt}\,,$$

y al sustituir en (1):

$$a_2 r^2 e^{rt} + a_1 r e^{rt} + a_0 e^{rt} = 0\,.$$

Dado que $e^{rt} \neq 0, \quad \forall\, t \in \Re$, es posible dividir la ecuación anterior entre e^{rt}. El resultado es la ecuación característica:

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0\,. \tag{3}$$

Se trata de una ecuación cuadrática con soluciones

$$r = r_1 \quad \text{y} \quad r = r_2$$

que pueden obtenerse, por ejemplo, mediante la fórmula:

$$r = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}\,.$$

Hay tres casos posibles para la solución general de (1):

1. Dos raíces reales diferentes, $r_1 \neq r_2$. En este caso, la solución general es

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}\,, \tag{4}$$

2. Dos raíces reales iguales $r_1 = r_2 = r$.

$$x(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} \tag{5}$$

3. Dos raíces complejas de la forma $r_1 = \alpha + \beta\imath$, $r_1 = \alpha + \beta\imath$, donde $\imath = \sqrt{-1}$. Por lo tanto, (4) adquiere la forma

$$x(t) = c_1 e^{(\alpha+\beta\imath)t} + c_2 e^{(\alpha-\beta\imath)t} = e^{\alpha t}\left(c_1 e^{\beta\imath t} + c_2 e^{-\beta\imath t}\right)\,.$$

Mediante la identidad de Euler:

$$e^{\pm\theta\imath} = \cos\theta \pm \imath \operatorname{sen}\theta$$

se llega a

$$x(t) = e^{\alpha t}\left[(c_1 + c_2)\cos\beta t + (c_1\imath - c_2\imath)\operatorname{sen}\beta t\right]$$

o bien, dado que los términos entre paréntesis son constantes:

$$x(t) = e^{\alpha t}\left[k_1 \cos\beta t + k_2 \operatorname{sen}\beta t\right] \tag{6}$$

Los valores c_1 y c_2 en (4) o (5); o k_1 y k_2 en (6) son las constantes de integración que pueden conocerse al asignar las condiciones iniciales

$$x(t_0) = x_0 \tag{7}$$
$$x'(t_0) = v_0\,, \tag{8}$$

donde $x'(t) = dx/dt$. Por ejemplo, al considerar el caso 1:

$$x'(t) = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t} \tag{9}$$

Al sustituir (7) en (4), y (8) en (9) cuando $t = t_0$, se obtiene un sistema de ecuaciones para las constantes c_1 y c_2. Al conocerlas y sustituir sus valores en (4) se llega a una solución particular de la ecuación (1). Se procede de manera similar en los casos 2 y 3.

1.2. Ecuación no homogénea

Se ilustra a continuación el uso del método de los coeficientes indeterminados. Por simplicidad, sólo se analiza el caso

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)\,, \tag{10}$$

donde

$$f(t) = u_1 \cos \lambda t + u_2 \operatorname{sen} \lambda t\,, \tag{11}$$

con $\{u_1, u_2 \in \Re\}$, es una función con periodicidad dada por la constante λ. Este caso ocurre en el análisis de vibraciones forzadas. La solución general de (10) es de la forma

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{12}$$

donde $x_h(t)$ es la solución de la correspondiente ecuación diferencial homogénea, dada por alguno de los casos (4) – (6). La solución particular, $x_p(t)$ es de la forma

$$x_p(t) = A \cos \lambda t + B \operatorname{sen} \lambda t \tag{13}$$

El objetivo es conocer los valores de los coeficientes A y B tales que (13) sea solución de la ecuación diferencial no homogénea, (10). A partir de (13)

$$x_p'(t) = -A\lambda \operatorname{sen} \lambda t + B\lambda \cos \lambda t \tag{14}$$

$$x_p''(t) = -A\lambda^2 \cos \lambda t - B\lambda^2 \operatorname{sen} \lambda t \tag{15}$$

Al sustituir (13) – (15) en (10) y reacomodar términos:

$$\big(a_2 A\lambda^2 - a_1 B\lambda - a_0 A + u_1\big) \cos \lambda t + \big(a_2 B\lambda^2 + a_1 A\lambda - a_o B + u_2\big) \operatorname{sen} \lambda t = 0$$

De esta igualdad se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales para las incógnitas A y B:

$$(a_2\lambda^2 - a_0)A - \qquad a_1\lambda\, B = -u_1 \tag{16}$$

$$a_1\lambda\, A + (a_2\lambda^2 - a_o)B = -u_2 \tag{17}$$

Las solución $\{A, B\}$ del sistema (16) – (17) se sustituye en (13) y a su vez $x_p(t)$ se reemplaza en (12).

2. Ejemplo

Encuentra la solución de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3x = \cos 3t \tag{18}$$

con condiciones iniciales: $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

Solución:

La solución de esta ecuación diferencial no homogénea es de la forma (10). $x_h(t)$ se obtiene al encontrar las raíces la ecuación característica, (3), que en este caso se escribe

$$r^2 + 2r + 3 = 0$$

con solución

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(3)}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}\,\imath.$$

Dado que las raíces son complejas, la solución cae en el caso 3. De acuerdo con (6):

$$x_h(t) = e^{-t}\left[k_1 \cos(\sqrt{2}t) + k_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}t)\right] \tag{19}$$

En lo que se refiere a la ecuación no homogénea: $f(t) = \cos 3t$, ec. (11). Por lo tanto, $x_p(t)$ es de la forma (13):

$$\begin{aligned} x_p(t) &= A\cos(3t) + B\operatorname{sen}(3t) \\ x_p'(t) &= -3A\operatorname{sen}(3t) + 3B\cos(3t) \\ x_p''(t) &= -9A\cos(3t) - 9B\operatorname{sen}(3t) \end{aligned}$$

Al sustituir estas expresiones en (18), se obtiene:

$$-9A\cos(3t) - 9B\operatorname{sen}(3t) - 6A\operatorname{sen}(3t) + 6B\cos(3t) + 3A\cos(3t) + 3B\operatorname{sen}(3t) = \cos(3t)$$

de donde, al simplificar e igualar los coeficientes de las funciones seno y coseno a cero, se obtiene:

$$\begin{aligned} -6A + 6B &= 1 \\ -6A - 6B &= 0 \end{aligned}$$

con solución $A = -1/12$, $B = 1/12$. Entonces

$$x_p(t) = \frac{-\cos(3x) + \operatorname{sen}(3x)}{12} \tag{20}$$

Al sustituir (19) y (20) en (12), se obtiene la solución general de (18):

$$x(t) = e^{-t}\left[k_1 \cos(\sqrt{2}t) + k_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}t)\right] + \frac{-\cos(3x) + \operatorname{sen}(3x)}{12} \tag{21}$$

Para encontrar la solución particular, con las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, es necesario obtener la primera derivada de $x(t)$:

$$\begin{aligned} x'(t) = {} & e^{-t}\left[-k_1\sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + k_2\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\right] \\ & - e^{-t}\left[k_1 \cos(\sqrt{2}t) + k_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}t)\right] + \frac{\operatorname{sen}(3t) + \cos(3t)}{4} \end{aligned} \tag{22}$$

Al sustituir las condiciones iniciales en (21) y (22)

$$\begin{aligned} 1 &= e^0\left[k_1 \cos 0 + k_2 \operatorname{sen} 0\right] + \frac{-\cos 0 + \operatorname{sen} 0}{12} \\ 2 &= e^0\left[-k_1\sqrt{2}\operatorname{sen} 0 + k_2\sqrt{2}\cos 0\right] - e^0\left[k_1\cos 0 + k_2\operatorname{sen} 0\right] + \frac{\operatorname{sen} 0 + \cos 0}{4} \end{aligned}$$

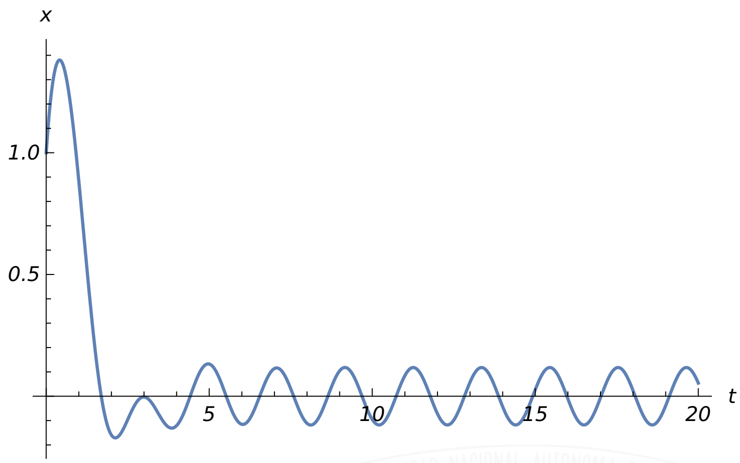
Este sistema de ecuaciones para k_1 y k_2 se reduce a

$$\begin{aligned} 1 &= k_1 - \frac{1}{12} \\ \frac{7}{4} &= -k_1 + \sqrt{2}k_2 \end{aligned}$$

y tiene por solución $k_1 = 13/12$, $k_2 = 17\sqrt{2}/12$). Por lo tanto, la solución particular de (18) es:

$$x(t) = \frac{e^{-t}}{12}\left[13\cos(\sqrt{2}t) + 17\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t) - \cos(3t) + \mathrm{sen}(3t)\right] \tag{23}$$

Gráficamente:



3. Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales para $x(t)$. En cada caso, incluye el procedimiento de solución y selecciona la respuesta correcta.

1. $x'' - 4x' + 6x = 0$.

   (a) $x = e^{t}\left[k_1\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{3}\,t\right) + k_2\cos\left(\sqrt{3}\,t\right)\right]$
   (b) $x = e^{2\,t}\left[k_1\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{2}\,t\right) + k_2\cos\left(\sqrt{2}\,t\right)\right]$
   (c) $x = e^{-2t}\left[k_1\,\mathrm{sen}\,(2\,t) + k_2\cos\,(2\,t)\right]$

2. $4x'' - 7x' - 2x = 0$, con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

   (a) $x = \frac{e^{2\,t}}{9} + \frac{8\,e^{-t/4}}{9}$
   (b) $x = k_1\,e^{2\,t} + k_2\,e^{-t/4}$
   (c) $x = k_1\cos(2t) + k_2\,\mathrm{sen}(2t)$

3. $4x'' - 12x' + 9x = 0$.

   (a) $x = k_1\,e^{\frac{3\,t}{2}} + k_2\,e^{-\frac{3\,t}{2}}$
   (b) $x = (k_1 + k_2\,t)\;e^{\frac{3\,t}{2}}$
   (c) $x = k_1\cos(3t/2) + \mathrm{sen}(3t/2)$

4. $x'' - 2x' - 8x = \cos 2t$.

   (a) $x = \frac{3\mathrm{sen}(2\,t) - \cos(2\,t)}{40} + k_1\,e^{4\,t} + k_2\,e^{-2\,t}$
   (b) $x = -\frac{\mathrm{sen}(2\,t) + 3\cos(2\,t)}{40}$
   (c) $x = -\frac{\mathrm{sen}(2\,t) + 3\cos(2\,t)}{40} + k_1\,e^{4\,t} + k_2\,e^{-2\,t}$

5. $x'' - 4x' + 4x = \cos t - \operatorname{sen} t$, con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

(a) $x = \left(\frac{4}{5} - \frac{26t}{25}\right) e^{2\,t} - \frac{7\sin(t)+\cos(t)}{25}$
(b) $x = \left(\frac{26}{25} - \frac{4\,t}{5}\right) e^{-2\,t} + \frac{7\sin(t)+\cos(t)}{25}$
(c) $x = \left(\frac{26}{25} - \frac{4\,t}{5}\right) e^{2\,t} - \frac{7\sin(t)+\cos(t)}{25}$

4. Bibliografía

Un texto apropiado para abordar este tema es

- D. G. Zill, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, 6a. edición, Thomson.