Introducción a la mecánica analítica

Prof. Jesús Hernández Trujillo Facultad de Química, UNAM

1. Mecánica analítica y fisicoquímica.

La mecánica clásica estudia los movimientos de los cuerpos macroscópicos y las fuerzas que los originan. Hay dos tratamientos generales comunes en el estudio de esta rama de la física. En la dinámica vectorial se aplican directamente las leyes de Newton siempre que se cuente con información explícita sobre las fuerzas involucradas en los componentes de un sistema. Adicionalmente, se define un conjunto de conceptos útiles tales como los de trabajo, energía y momento lineal, entre otros, para analizar mediante ellos el movimiento de los objetos en una gran variedad de situaciones. Con estas cantidades escalares y vectoriales y con las leyes de Newton, se diseñan procedimientos de solución para una gran diversidad problemas. Esta es la manera habitual de abordar el tema en los libros de física para ciencias e ingenierías. Por otro lado, en la mecánica analítica se enfatiza el uso de cantidades escalares para el sistema como un todo y se introducen funciones adicionales – el Lagrangiano y el Hamiltoniano – en un tratamiento que conduce a formas alternas de las ecuaciones de movimiento. Esta metodología es utilizada con más frecuencia por los físicos y presenta algunas ventajas para la solución de problemas específicos y también para el desarrollo de la estructura formal de la teoría.

Lejos de ser exhaustivo, este texto hace una breve presentación de algunos aspectos del formalismo de la mecánica analítica como base física de la química cuántica y la termodinámica estadística, las cuales dan un firme soporte a la química. A lo largo del texto se resuelven ejercicios que, aunque sencillos, permiten ilustrar la correspondencia que hay entre la aplicación de la mecánica newtoniana y la mecánica analítica. También, se aprovecha la oportunidad que ofrece la mecánica analítica para la aplicación de la transformada de Legendre (la cual se describe en el Apéndice A) al pasar de la representación Lagrangiana a la Hamiltoniana. Se debe aclarar que en este documento no se discute la relación entre

la mecánica analítica y la fisicoquímica sino que sólo se presentan algunos de sus fundamentos. Dos objetivos particulares importantes son: (1) definir el espacio de fase y (2) describir las circunstancias en que la energía mecánica de un sistema está dada por su Hamiltoniano, como se hace en con frecuencia en química cuántica y termodinámica estadística. Para un tratamiento detallado de la mecánica analítica, se proporcionan algunas referencias bibliográficas al final del documento.

2. Segunda ley de Newton.

En mecánica clásica, las fuerzas cuantifican las interacciones. Para un sistema de N partículas con masas $\{m_i\} \equiv \{m_i | i = 1, 2, \ldots, N\}$, la ecuación de movimiento para la i-ésima de ellas es la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{F}_i = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d[m\mathbf{v}_i]}{dt}\,, \tag{1}$$

donde $\mathbf{v}_i$ es el vector velocidad y $\mathbf{F}_i$ es la fuerza resultante ejercida sobre la partícula. Además, la aplicación de esta ley supone que el movimiento de las partículas se analiza en relación a un sistema de referencia inercial.[a] Esta ecuación también puede expresarse en términos del momento lineal, $\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_i$, para tomar la forma:

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i\,. \tag{2}$$

Es decir, la fuerza que actúa sobre la partícula es la derivada temporal de su momento lineal, $\dot{\mathbf{p}}_i$. De esta manera, la fuerza mide la razón de cambio del estado de movimiento de la partícula debido a las interacciones de ésta con su entorno. Adicionalmente, la fuerza resultante proviene de la acción de las fuerzas internas ejercidas por las demás partículas del sistema y posiblemente algún agente externo.

Además, las velocidad de la i-ésima partícula es la derivada temporal del vector de posición que define su trayectoria, $d\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$, donde $\mathbf{r}_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$. Si se cuenta con información suficiente sobre el conjunto de fuerzas que actúan sobre las partículas, $\{\mathbf{F}_i\}$, es posible conocer la evolución temporal de un sistema al resolver la ecuación (2) para condiciones iniciales específicas dadas por posiciones y momentos en $t = t_0$, es decir, los conjuntos $\{\mathbf{r}_{i,0} = \mathbf{r}_i(t_0)\}$ y $\{\mathbf{p}_{i,0} = \mathbf{p}_i(t_0)\}$.

[a] Un sistema de referencia inercial es aquél que se mueve a velocidad constante respecto a otro inercial.

Como resultado, se obtiene el conjunto $\{\mathbf{r}_i(t)\}$ que comprende las trayectorias de las partículas.

Ejemplo:

Considerar una partícula de masa m que se mueve en una dimensión bajo la influencia de una fuerza regida por la ley the Hooke, $F = -kx$. En este caso, la ecuación de movimiento es

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

con solución

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)\,,$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia circular. En este caso, la amplitud, A, y la fase, ϕ, son las constantes de integración de la ecuación diferencial. La anterior, es la expresión general de la trayectoria que sigue la partícula. El siguiente paso consiste en involucrar las condiciones iniciales, es decir, la posición y el momento lineal (o la velocidad, la cual conduce a $p = mv$) en un instante dado,

$$x_0 = x(t_0) \quad \text{y} \quad v_0 = v(t_0)$$

para obtener una solución particular de la ecuación de movimiento. Con ellas, se resuelve el sistema de ecuaciones

$$x_0 = A\,\mathrm{sen}(\omega t_0 + \phi)$$
$$v_0 = A\omega\cos(\omega x + \phi)$$

y se obtienen los valores de A y ϕ y, por lo tanto, una trayectoria específica del sistema. O sea, al resolver la ecuación de movimiento del oscilador armónico y definir las condiciones iniciales, es posible conocer el movimiento futuro del sistema oscilatorio en cualquier instante.

3. Trabajo y energía.

Hasta este punto, el uso de la segunda ley de Newton de manera directa requiere el conocimiento de información explícita de las fuerzas que actúan sobre un sistema. Mediante las definiciones de trabajo y energía, en combinación con la segunda ley,

es posible estudiar la dinámica de los sistemas sin involucrar directamente a las fuerzas.

El trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre el sistema para llevarlo de un arreglo espacial 1 a otro 2, se define mediante la integral de línea

$$W = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i \,. \tag{3}$$

Por lo tanto, el trabajo depende de la trayectoria $\mathbf{r}_i(t)$ que sigue cada partícula al ir del arreglo 1 al 2.

Además,[b] dado que $d(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/dt = 2\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}/dt$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i \cdot \underbrace{\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}dt}_{d\mathbf{r}_i=\mathbf{v}_i\,dt} &= \underbrace{m_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}}_{\text{ec. (1)}} \cdot \mathbf{v}_i\, dt \\ &= \frac{m_i}{2}\,\frac{d(\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i)}{dt}\,dt = \frac{m_i}{2}\,\frac{dv_i^2}{dt}\,dt\,, \end{aligned} \tag{4}$$

donde $v_i^2 = \mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i$ es el cuadrado de la magnitud del vector velocidad, es decir, de la rapidez. Al sustituir este resultado en (3), se obtiene

$$W = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_i \int_1^2 \frac{m_i}{2}\,\frac{dv_i^2}{dt}\,dt$$

Y como la diferencial[c] de v_i^2 es $d[v_i^2] = [d(v_i^2)/dt]\,dt$, entonces:

$$W = \sum_i \int_1^2 \frac{m_i}{2} d[v_i^2] = \sum_i \left.\frac{mv_{i,2}^2}{2}\right|_1^2 .$$

Es decir,

$$W = \sum_i \frac{mv_{i,2}^2}{2} - \sum_i \frac{m_i v_{i,1}^2}{2}\,, \tag{5}$$

donde $v_{i,1}$ es la rapidez de la partícula en el estado 1 y $v_{i,2}$ en el estado 2. Ahora, es conveniente definir la energía cinética de la i-ésima partícula,

$$K_i = \frac{m_i v_i^2}{2}\,, \tag{6}$$

[b] Utilizar $d(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})/dt = \mathbf{a}\cdot(d\mathbf{b}/dt) + (d\mathbf{a}/dt)\cdot\mathbf{b}$.

[c] La diferencial de una función de una variable, $f(t)$, se define como $df = [df(t)/dt]\,dt$.

y la del sistema completo,

$$K = \sum_i K_i \,. \tag{7}$$

Al sustituir (6) y (7) en (5) se obtiene el *teorema del trabajo y la energía*:

$$W = K_2 - K_1 = \Delta K \,, \tag{8}$$

donde K_1 y K_2 son las energías cinéticas del sistema en el estado inicial y final, respectivamente. Este resultado establece que el trabajo realizado sobre un sistema de partículas es igual al cambio en la energía cinética debido al proceso.

Nótese que no se ha agregado ninguna ley física adicional a la teoría sino que se ha reescrito la ecuación de movimiento en la forma (8). Así, se abre la puerta para estudiar las interacciones que ocurren a un sistema en términos energéticos sin necesidad de conocer la forma explícita de las fuerzas que actúan sobre él sino utilizando información energética accesible experimentalmente.[d]

Un caso especial es aquél donde las fuerzas pueden ser obtenidas a partir de un potencial,

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N), \tag{9}$$

donde el gradiente se calcula respecto a las coordenadas $\mathbf{r}_i$. En este caso, el trabajo, (3), toma la forma:[e]

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_i = -\sum_i \int_1^2 \nabla_i V \cdot d\mathbf{r}_i = -\sum_i \int_1^2 dV_i = -\sum_i (V_{i,2} - V_{i,1}))$$

donde $V_{i,1}$ y $V_{1,2}$ son los valores del potencial en las configuraciones 1 y 2, respectivamente. Por lo tanto, en términos de energía potencial, el trabajo es

$$W = -V_2 + V_1 = -\Delta V. \tag{10}$$

[d]En química, la situación más habitual consiste en estudiar los procesos en términos energéticos (por medio de las leyes de la termodinámica) y no en términos de fuerzas. Y aunque con frecuencia se habla de fuerzas de interacción, en realidad se obtienen conclusiones basadas en información energética. Por ejemplo, al hablar de la fuerza del enlace químico en una molécula diatómica, usualmente se refiere a las energías de disociación.

[e]La diferencial total de una función de n variables, $g(\mathbf{r}) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, es

$$\begin{aligned} dg &= \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{\partial g}{\partial x_n}\right) dx_n \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right) \cdot (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = \nabla g \cdot d\mathbf{r} \,, \end{aligned}$$

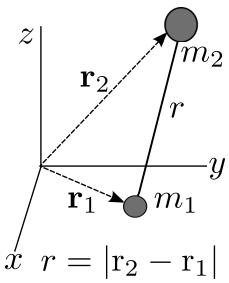
Esto significa que, en el caso de una fuerza derivable de un potencial, la integral de línea que define al trabajo es independiente de la trayectoria; W sólo depende de los estados inicial y final del sistema.

Al igualar (8) y (10) se obtiene la conservación de la energía mecánica, $E = K + V$, al llevar al sistema de la configuración 1 a la 2:

$$E_1 + V_1 = K_2 + V_2 \tag{11}$$

A las fuerzas derivables de un potencial se les llama *fuerzas conservativas* y los sistemas sobre las que éstas actúan se conocen como *sistemas conservativos*.

Ejemplo:



Un sólido rígido es aquél en que las distancias entre las partículas que lo componen, r_{ij}, están fijas. Se trata de un sistema conservativo; al ser constantes las distancias, las contribuciones al potencial son constantes, $V_i = V_{i,0}$, y $\mathbf{F}_i = -\nabla V_{i,0} = \mathbf{0}$.

Un caso de sólido rígido es el de dos masas unidas por una barra rígida con peso despreciable. En este caso, aunque el objeto esté girando, la distancia entre ellas es constante y, por lo tanto, $V(r) = V_0$ también es constante. Dado que $\mathbf{F} = -\nabla V_0 = \mathbf{0}$ para todo V_0, es posible escoger $V_0 = 0$ como referencia.

Ejemplo:

La interacción entre dos cargas puntuales q_1 y q_2 con vectores de posición $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, respectivamente, está dada por la ley de Coulomb:

$$V(r) = V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r},$$

donde ε_0 es la permitividad del vacío. Aquí, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ es el vector tiene por punto inicial a $\mathbf{r}_1$ y final a $\mathbf{r}_2$. Además, $r = |\mathbf{r}|$ es la distancia de separación entre las cargas. La fuerza ejercida entre ellas es[f]

$$\mathbf{F} = -\nabla V = \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^3}\mathbf{r}$$

[f]Se puede utilizar la identidad $\nabla r^n = n r^{n-2}\,\mathbf{r}$ con $n = -1$.

Además, de acuerdo con (10) el trabajo realizado al llevar las cargas de una distancia r_1 a r_2 es

$$W = -\Delta V = -\left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$$

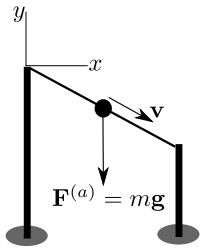
---

4. Restricciones.

En el desarrollo de la teoría, es necesario tomar en cuenta las restricciones que puedan limitar el movimiento de un sistema. En ocasiones, estas restricciones son de la forma

$$f_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{12}$$

y se llaman restricciones holonómicas. Con frecuencia, las ecuaciones de restricción no dependen del explícitamente tiempo. Las fuerzas de restricción no son conocidas de antemano y deben ser obtenidas a partir de su efecto sobre el movimiento del sistema. En el ejemplo de la figura, la restricción es la línea recta $c_1 x + c_2 y = 0$ debida a la cuerda tensa. Asimismo, en consecuencia de las restricciones, las coordenadas de las partículas dejan de ser independientes.



La cuenta se desliza en la línea recta definida por la cuerda tensa.

5. Coordenadas generalizadas.

Resulta conveniente utilizar coordenadas generalizadas para describir la dinámica de un sistema. Mientras que un sistema de N partículas sin restricciones tiene $3N$ grados de libertad, en uno con k restricciones holonómicas éste se reduce a $\ell = 3N - k$. Por lo tanto, hay ℓ coordenadas generalizadas, $\{q\} \equiv \{q_1, q_2, \ldots, q_\ell\}$, que se relacionan con las coordenadas cartesianas, $\{\mathbf{r}\} \equiv \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\}$, mediante las ecuaciones de transformación:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \ldots, q_\ell, t) \\
\mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_2(q_1, q_2, \ldots, q_\ell, t) \\
&\vdots \\
\mathbf{r}_N &= \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \ldots, q_\ell, t)
\end{aligned} \tag{13}$$

Ejemplo:

En el estudio del movimiento de una partícula sobre la superficie de una esfera de radio r, es conveniente la transformación a coordenadas esféricas, $(x, y, z) \to (r, \theta, \phi)$, sujeto a la restricción $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r = 0$. En este caso, hay $\ell = 2$ grados de libertad y las coordenadas generalizadas son $q_1 \equiv \theta$ y $q_2 \equiv \phi$.

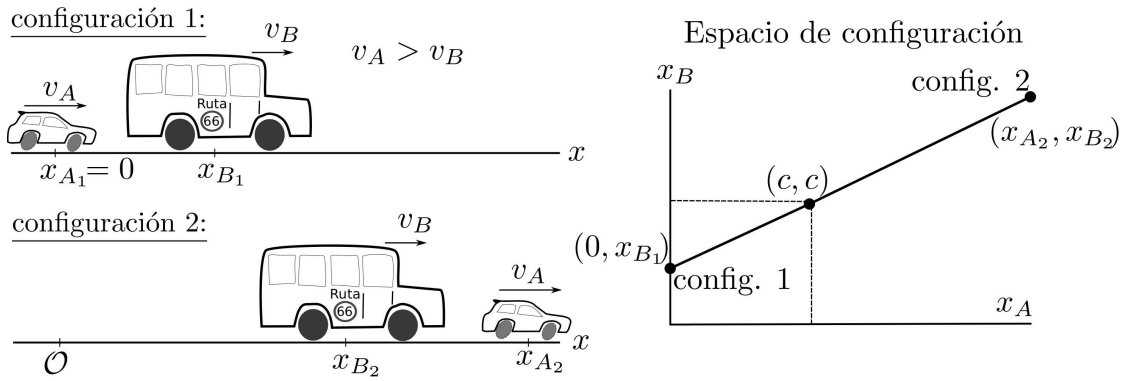
---

6. Espacio de configuración.

En un instante dado, el conjunto de coordenadas generalizadas, $\{q_i\}$, corresponde a un arreglo o configuración de las partículas del sistema. El conjunto de todas las posibles configuraciones constituye el llamado *espacio de configuración* en el que un arreglo específico corresponde a un punto en este espacio. La evolución temporal de las coordenadas generalizadas se representa por una trayectoria en el espacio de configuración.

Ejemplo:

Considerar dos vehículos que se mueven en una línea recta a velocidad constante como se muestra en la figura. En este caso, el espacio de configuración es de dimensión 2 y comprende como coordenadas generalizadas a la coordenada x_A de la primera partícula y la x_B de la segunda.[g]



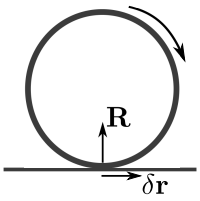
[g]Aquí se ha utilizado la aproximaciónde partícula; en ella, cada objeto está representado por un punto, como por ejemplo su centro de masa.

El movimiento simultáneo de ambos vehículos define una curva en el espacio de configuración que conecta a las configuraciones inicial y final, (x_{A1}, x_{B1}) y (x_{A2}, x_{B2}), respectivamente. Dado que en este caso éstos se mueven a velocidad constante y el tiempo transcurre de la misma manera para ambos, entonces $t = (x_A - x_{A_1})/v_1 = (x_B - x_{B_1})/v_2$ es una recta en el plano $x_A x_B$. Adicionalmente, la intersección entre las líneas punteadas y la línea sólida que representa la trayectoria en el espacio de configuración muestra el par (c, c) donde el automóvil rebasa al camión.

---

7. Trabajo virtual.

Se define un *desplazamiento virtual* como un cambio arbitrario infinitesimal, $\delta\mathbf{r}_i$, en las coordenadas que es consistente con las fuerzas y restricciones impuestas sobre un sistema suponiendo que no transcurre el tiempo. En contraste, un cambio infinitesimal real de las coordenadas, $d\mathbf{r}_i$, sí puede involucrar un cambio en las fuerzas y restricciones del sistema. De manera correspondiente a un desplazamiento virtual, se define el trabajo virtual. Para un sistema en equilibrio, la fuerza neta que actúa sobre cada partícula vale cero, $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, y por lo tanto $\mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$.



$\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$

Aro sujeto a una fuerza de restricción y un desplazamiento virtual.

El trabajo virtual se define como

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0\,. \tag{14}$$

Expresar ahora a las fuerzas ejercidas sobre las partículas términos de las fuerzas aplicadas $\mathbf{F}_i^{(a)}$ y las fuerzas de restricción, $\mathbf{R}_i$:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i\,. \tag{15}$$

Al sustituir (15) en (14), se obtiene:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0\,. \tag{16}$$

Cuando las fuerzas de restricción no realizan trabajo:

$$\sum_i \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{17}$$

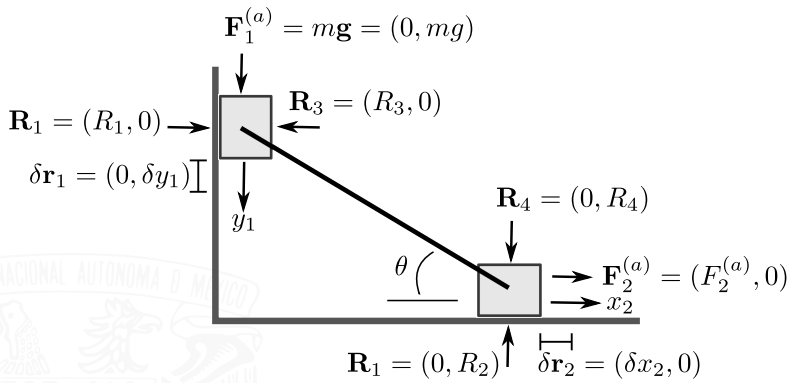
se llega al *principio del trabajo virtual*:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \tag{18}$$

En general, $\mathbf{F}_i^{(a)} \neq \mathbf{0}$ y debido a las ecuaciones de restricción las $\delta \mathbf{r}_i$ no son independientes.

Ejemplo:

Utilizar el principio del trabajo virtual para encontrar $\mathbf{F}_2^{(a)}$ si el sistema de la figura se encuentra en equilibrio estático. Considerar que no hay fricción con la pared ni el piso y que la masa de la barra rígida es despreciable.



En este caso, hay cuatro fuerzas de restricción: dos externas, $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$, y dos internas, las que ejerce la barra. Ninguna de estas fuerzas realiza trabajo. Por ejemplo, $\mathbf{R}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 = (R_1, 0) \cdot (0, \delta y_1) = 0$. Adicionalmente, las fuerzas externas aplicadas son la de gravedad, dada por $m\mathbf{g}$, y $\mathbf{F}_2^{(a)}$ y cumplen con (18):

$$\begin{aligned} (0, mg) \cdot (0, \delta y_1) + (F_2^{(a)}, 0) \cdot (\delta x_2, 0) &= 0 \\ mg\delta y_1 + F_2^{(a)} \delta x_2 &= 0 \qquad (a) \end{aligned}$$

La restricción impuesta al movimiento es que los desplazamientos de los extremos de la barra sean iguales pues la barra es rígida:

$$(\operatorname{sen}\theta)\, \delta y_1 = (\cos\theta)\, \delta x_2 \,,$$

lo cual muestra que, en consecuencia, los desplazamientos virtuales no son independientes:

$$\delta y_1 = (\cot\theta)\, \delta x_2 \,. \qquad (b)$$

Al sustituir (b) en (a) y considerando que $\delta x_2 \neq 0$, entonces

$$[mg \cot\theta + F_2^{(a)}]\, \delta x_2 = 0 \,,$$

de donde se obtiene la condición de equilibrio estático:

$$F_2^{(a)} = -mg\cot\theta$$

Alternativamente, se recomienda resolver este problema por los métodos vectoriales habituales.

---

8. Ecuaciones de Lagrange.

Para aplicar el procedimiento de la sección anterior al movimiento general de un sistema mecánico, hay que reescribir la ecuación (2):

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0}$$

En esta ecuación, $-\dot{\mathbf{p}}_i$ puede considerarse como una fuerza de reacción a $\mathbf{F}_i$. Como consecuencia, el trabajo virtual es

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0$$

y debido a (15):

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{R}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0\,.$$

Dado que las fuerzas de restricción no realizan trabajo, (17), se obtiene el llamado *principio D'Alembert*:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0\,. \tag{19}$$

Obsérvese que no aparecen las fuerzas de restricción en esta ecuación.

El siguiente paso consiste en expresar la ecuación (19) en términos de coordenadas generalizadas. Dado que se trata de realizar cambios de variable, se recurre a la regla de la cadena y a las ecuaciones de transformación a coordenadas generalizadas, (13). El resultado es:[h]

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)}\cdot\delta\mathbf{r}_i = \sum_j Q_j\delta q_j \quad \text{y} \tag{20}$$

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i = \sum_j \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j}\right)\,. \tag{21}$$

[h]El procedimiento, un tanto extenso, se puede consultar en alguna de las referencias proporcionadas en la bibliografía.

En la ecuación (20):

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \tag{22}$$

se llama la *fuerza generalizada*. La definición de las coordenadas generalizadas en algún problema específico trae como consecuencia que Q_j no necesariamente tenga unidades de fuerza. Además, en (21) se ha usado la definición de energía cinética dada en la ecuación (7).

Al sustituir (20) y (21) en (19), el principio D'Alembert toma la forma:

$$\sum_j \left[\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0$$

Y como los desplazamientos virtuales son independientes:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j \tag{23}$$

Cuando las fuerzas externas provienen de un potencial, las fuerzas generalizadas, (22), toman la forma

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Al sustituir en (19):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \{K - V\}}{\partial q_j} = 0 \tag{24}$$

Cuando V no depende de las velocidades generalizadas, el primer término de la última ecuación puede escribirse como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \{K - V\}}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

y al sustiuir en (24) se obtienen las *ecuaciones de Euler-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell. \tag{25}$$

donde

$$L(q_1, q_2, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) \equiv L(q_i, \dot{q}_1, t) = T - V \tag{26}$$

se llama el Lagrangiano. Nótese que el Lagrangiano tiene a las coordenadas generalizadas, las velocidades generalizadas y al tiempo como variables naturales. Las ecuaciones de Euler-Lagrange también pueden obtenerse con el método variacional sin recurrir a la definición de trabajo virtual.

Ejemplo:

Considerar el movimiento de una partícula en coordenadas cartesianas.

En este caso, las coordenadas generalizadas se reducen a $q_1 \equiv x_1, q_2 \equiv y_1, q_3 \equiv z$ y las fuerzas generalizadas, ecuación (22), toman la forma

$$Q_x = F_x \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1} + F_y \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{0} + F_z \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{0} = F_x$$

$$Q_y = F_x \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{0} + F_y \underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{1} + F_z \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{0} = F_y$$

$$Q_z = F_x \underbrace{\frac{\partial x}{\partial z}}_{0} + F_y \underbrace{\frac{\partial y}{\partial z}}_{0} + F_z \underbrace{\frac{\partial z}{\partial z}}_{1} = F_z$$

Además:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Ahora, se sustituyen estos resultados en la ecuación (23). Para la componente x se obtiene:

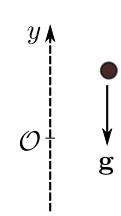
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\{\frac{1}{2}m\dot{x}^2\}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial\{\frac{1}{2}m\dot{x}^2\}}{\partial x} = \frac{d\{m\dot{x}\}}{dt} - 0 = F_x$$

Es decir:

$$F_x = m\ddot{x}$$

De igual manera: $F_y = m\ddot{y}, F_z = m\ddot{z}$; se recupera la segunda ley de Newton.

Ejemplo:



Analizar el tiro vertical de un objeto como caso especial de la acción de una fuerza conservativa.

Dado que

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2, \quad V = mgy$$

entonces, el Lagrangiano, (26), toma la forma

$$L(y, \dot{y}) = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$$

Al sustituir en la ecuación de Lagrange, (25), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy\right] &= 0 \\ \frac{d\{m\dot{y}\}}{dt} \quad + \quad mg &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = -g$$

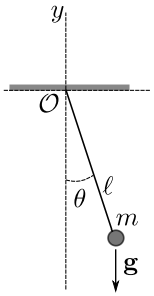
y al integrar se llega a

$$y = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + y_0$$

donde t_0, y_0 y v_0 se definen mediante las condiciones iniciales del problema.

Ejemplo:

Analizar el movimiento del péndulo simple.



En este caso, conviene expresar la ecuación de la trayectoria en coordenadas polares:

$$\mathbf{r}(t) = L\big(\cos\,\theta(t),\, \text{sen}\,\theta(t)\,\big)$$

Dado que L es constante, $q \equiv \theta$ se utiliza como coordenada generalizada. Para escribir al Hamiltoniano, se requieren las expresiones de las energías cinética y potencial.

La velocidad del péndulo es

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = L\left(-\,\text{sen}\,\theta\frac{d\theta}{dt}, \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right) = L(-\,\text{sen}\,\theta, \cos\theta)\frac{d\theta}{dt} = L(-\,\text{sen}\,\theta, \cos\theta)\,\dot{\theta}$$

En este procedimiento, se ha tomado en cuenta que L no depende del tiempo. Por lo tanto, la rapidez al cuadrado es

$$v^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = L^2[(-\operatorname{sen}\theta)^2 + \cos^2\theta)]\dot{\theta}^2 = L^2\dot{\theta}^2 \,.$$

Entonces, la energía cinética es

$$K(\dot{\theta}) = \frac{mv^2}{2} = \frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2}$$

Ahora, se obtiene la energía potencial. Con el sistema de referencia orientado como en la figura, ésta es

$$V(\theta) = -mgL\cos\theta \,.$$

Por lo tanto, el Lagrangiano del sistema es

$$L(\theta, \dot{\theta}) = K - V = \frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2} - (-mgL\cos\theta)$$

y la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2} + mgL\cos\theta\right)\right] - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2} + mgL\cos\theta\right) = 0$$

Dado que

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2} + mgL\cos\theta\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[mL^2\dot{\theta}\right] = mL\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2} + mgL\cos\theta\right) = -mgL\operatorname{sen}\theta$$

entonces

$$mL^2\ddot{\theta} + mgL\operatorname{sen}\theta = 0$$

O bien

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0 \,.$$

9. Ecuaciones de Hamilton.

Considerar un sistema bajo la acción de fuerzas conservativas:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \cancelto{0}{\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_j \frac{1}{2} m_j (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2)$$
$$= \sum_j \frac{1}{2} m_j \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2)$$

Dado que las componentes de las velocidades son independientes entre sí, las derivadas de $\dot{y}_j$ y $\dot{z}_j$ respecto a $\dot{x}_i$ valen cero. Por otro lado, $\partial[\dot{x}_j^2]/\partial x_i = 2\dot{x}_j$ sólo cuando $j = i$. Por lo tanto, sólo queda un término de la suma anterior:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_j \frac{1}{2} m_j \left(2\dot{x}_i \delta_{ij}\right) = m_i \dot{x}_i \,.$$

En este desarrollo se ha utilizado la delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \,, \; j = i \\ 0 \,, \; j \neq i \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = p_{x,i} \tag{27}$$

pues $p_{x,i}$ es la componente x del momento lineal de la partícula i.

Se define ahora el *momento conjugado canónico generalizado* como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{28}$$

El momento lineal en coordenadas cartesianas, (27), es un caso especial de (28). Además, debido a la definición de las coordenadas generalizadas, el momento generalizado no necesariamente tiene unidades de momento lineal.

A continuación, se hará el cambio de variables básicas de $\{q_i, \dot{q}_i, t\}$ a $\{q_i, p_i, t\}$ que conduce a la definición del Hamiltoniano del sistema. El desarrollo matemático puede hacerse mediante el uso directo del cálculo diferencial como ocurre frecuentemente en la literatura. Otra alternativa parte de tomar en cuenta que, más que cambiar de variable en el Lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange, se hace un cambio de representación que puede ser apreciado mediante la transformada de

Legendre. Ésta es la manera como se aborda el problema en este documento.[i] Para ello, se reconoce al par de variables conjugadas $\{\dot{q}_i, p_i\}$, definido por la ecuación (28).

En el caso de una partícula en una dimensión, la primera transformada de Legendre de L respecto a las variables conjugadas $\dot{q}$ y p, según la ecuación (28), es

$$H(q,p,t) = p\,\dot{q} - L \tag{29}$$

donde H se llama el Hamiltoniano.[j] H es función de p, q y t pues, de acuerdo con (28), $\dot{q}$ es función de p y t.

La diferencial total de H es:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

y por las propiedades de la transformada de Legendre, ecuaciones (48) y (49) del Apéndice:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{30}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \tag{32}$$

Estas ecuaciones se obtienen[k] al considerar que sólo se cambió de la variable $\dot{q}$ a p y se conservaron q y t. Al utilizar la ecuación de Euler-Lagrange, (25), con $\ell = 1$ y la definición del momento generalizado, (28), se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{dp}{dt} = \dot{p}$$

Por lo tanto, la ecuación (30) toma la forma

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{33}$$

[i] En el apéndice **??** se discute la transformada de Legendre.

[j] Por convención, H se define como el negativo de la transformada de Legendre respecto a su uso en otras áreas como la termodinámica o mecánica estadística.

[k] Alternativamente, se puede obtener la diferencial total de H a partir de (29) y llegar a (30)-(32); ver la referencia 1.

Las ecuaciones (31), (32) y (33) se conocen como las *ecuaciones de Hamilton.*

Ahora, se extiende este resultado al caso en que hay más de un grado de libertad. De acuerdo con (46) y tomando en cuenta el pie de página j, la transformada de Legendre de las variables $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N\}$ a $\{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$ es:

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_N, p_1, p_2, \ldots, p_N, t) = \sum_k^{\ell} p_k \dot{q}_k - L \tag{34}$$

Un caso particular importante es aquél donde las coordenadas generalizadas, (13), no dependen explícitamente del tiempo. En esta situación, de acuerdo con la regla de la cadena, las componentes de la velocidad en coordenadas generalizadas se reducen a:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} &= \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}} \\ &= \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía cinética es

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \right)^2$$

Al estar elevados al cuadrado los términos entre paréntesis, se trata de productos de las velocidades generalizadas de la forma $\dot{q}_i\dot{q}_j$ multiplicados por un coeficiente a_{ki}. Para los fines de esta discusión, no es necesario conocer la forma explícita[l] de estos coeficientes; basta con reconocer que la energía cinética es una combinación de términos cuadráticos:[m]

$$K = \frac{1}{2} \sum_k \sum_i a_{ki} \dot{q}_k \dot{q}_i \tag{35}$$

Si, además, el potencial V no depende explícitamente de las velocidades, entonces:

[l] Los coeficientes a_{ki} pueden consultarse en la referencia 2.

[m] Se trata de una forma cuadrática pues la suma de los exponentes de cada producto $\dot{q}_k\dot{q}_i$ es igual a dos.

$$
\begin{aligned}
p_k &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial\{K-V\}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \cancelto{0}{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}} \\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left[\frac{1}{2}\sum_j\sum_i a_{ji}\dot{q}_j\dot{q}_i\right] = \frac{1}{2}\sum_j\sum_i a_{ji}\frac{\partial\{\dot{q}_j\dot{q}_i\}}{\partial \dot{q}_k} \\
&= \frac{1}{2}\sum_j\sum_i a_{ji}\left(\dot{q}_j\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_i\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k}\right)
\end{aligned}
$$

Dado que las velocidades generalizadas son independientes entre sí, entonces $\partial\dot{q}_i/\partial\dot{q}_k = \delta_{ik}$. Como resultado, sólo persiste una de las sumatorias anidadas en la expresión de p_k, misma que puede separarse en dos sumas:

$$
p_k = \frac{1}{2}\left[\sum_j a_{jk}\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_i a_{ki}\dot{q}_i\right]
$$

Además, como $a_{kj} = a_{jk}$, entonces las sumas anteriores sólo difieren en la letra usada como índice (j en la primera e i en la segunda) y valen lo mismo. Por lo tanto:

$$
p_k = \sum_i a_{ki}\dot{q}_i \tag{36}
$$

Al sustituir (35) y (36) en (34) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_k p_k\dot{q}_k - L = \sum_k\sum_i a_{ki}\dot{q}_k\dot{q}_i - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_k\sum_i a_{ki}\dot{q}_k\dot{q}_i - V}_{K-V} \\
&= \frac{1}{2}\sum_k\sum_i a_{ki}\dot{q}_k\dot{q}_i + V
\end{aligned}
$$

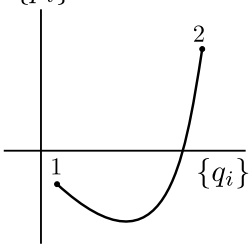
Es decir, cuando las coordenadas generalizadas no dependen explícitamente del tiempo y el potencial no depende explícitamente de las velocidades, debido (35), el Hamiltoniano es la energía mecánica del sistema:

$$
H = K + V \tag{37}
$$

10. Espacio de fase.

El conocimiento del espacio de configuración, descrito en la sección 6, no es suficiente para analizar la dinámica de un sistema. Esto se debe a que se requiere información ya sea sobre las velocidades generalizadas en el caso de las ecuaciones de Lagrange, o de los momentos generalizados en el caso de las ecuaciones de Hamilton. En este último caso, es conveniente definir el *espacio de fase* como el conjunto de valores posibles de las coordenadas y momentos generalizados $\{p_i, q_i\}$. Un punto en el espacio de fase corresponde a un estado dinámico del sistema y la evolución temporal de este se describe como una trayectoria que sea consistente con las restricciones físicas impuestas.

Espacio de fase



Trayectoria clásica de un sistema entre los estados 1 y 2.

Ejemplo:

Para el oscilador armónico en una dimensión, la función de energía potencial no depende explícitamente de la velocidad ni del tiempo y está dada por

$$V(x) = \frac{k}{2}x^2 \,.$$

Además, la coordenada generalizada es x y no depende explícitamente del tiempo. Por lo tanto, el Lagrangiano y el Hamiltoniano no dependen del tiempo y son:

$$\begin{aligned} L(x,\dot{x}) &= T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \,, \\ H(x,p) &= p\dot{x} - L = m\dot{x}\dot{x} - \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 \\ &= \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k}{2}x^2 \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \qquad (c) \end{aligned}$$

Es decir, el Hamiltoniano es igual a la energía mecánica del oscilador. Al usar las ecuaciones de Hamilton (31) y (33) en (c), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \end{aligned}$$

Nótese que la primera de estas ecuaciones se reduce a $p = m\dot{x}$ y, mediante (2), la segunda ecuación es la ley de Hooke. Además, al derivar la primera respecto al tiempo, se obtiene:

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m}$$

y al combinar con la ley de Hooke:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

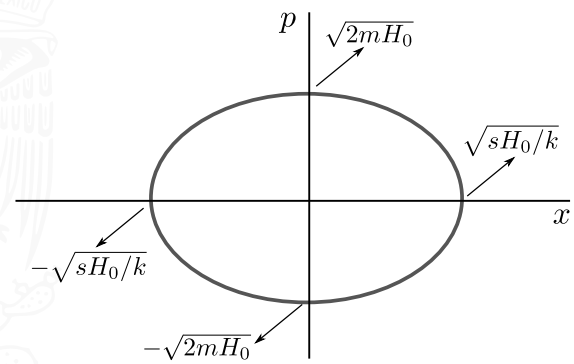
Se trata de la ecuación de movimiento del oscilador armónico expresada como aparece con frecuencia en libros introductorios de física:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

donde $\omega^2 = k/m$.

Una trayectoria particular en el espacio de fase de este sistema es aquella donde la energía mecánica del oscilador es constante, $H = H_0$, lo que conduce a la ecuación de una elipse:

$$\frac{p^2}{2mH_0} + \frac{x^2}{\frac{2H_0}{k}} = 1$$



Apéndice: Transformada de Legendre.

Sea la función de una variable:

$$y = y(x) \tag{38}$$

En ocasiones, es de interés expresar la información contenida en esta expresión de manera diferente. En la transformada de Legendre, en lugar de utilizar a x como variable independiente, se usa su derivada, p:[n]

[n] En este apéndice, la notación utilizada es independiente de la del resto del documento. En particular, p no necesariamente representa al momento lineal sino a la derivada de la indeterminada x.

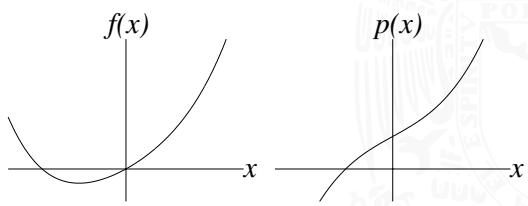
$$p = \frac{dy}{dx} \tag{39}$$

Una posibilidad consiste en despejar $x = x(p)$ a partir de (39) y sustituir en (38). Por otro lado, en la transformada de Legendre no sólo se cambia la variable independiente sino que también se utiliza otra cantidad distinta a y como variable dependiente. Se dice que se hace un cambio de representación que resulta conveniente en muchas situaciones físicas, en particular, en mecánica analítica, termodinámica, mecánica estadística y mecánica cuántica.

Para realizar el cambio de x a p como variable independiente, se ha de cumplir que:

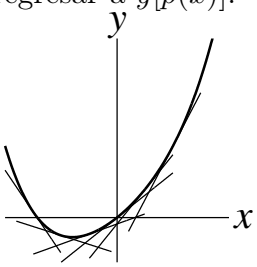
1. $y(x)$ sea una función convexa. Es decir, $y''(x) > 0, \quad \forall x \in D$, donde D es el dominio de $y(x)$.

2. $y(x)$ sea suave en D. Es decir, debe tener derivadas continuas.



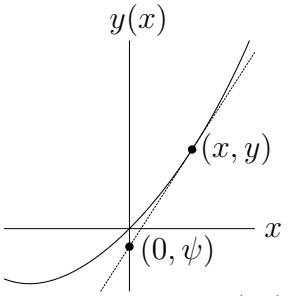
Dado que $y(x)$ es convexa, $p(x)$ es monótona. En consecuencia, existe una relación 1:1 entre p y x, es decir, $p(x)$ es univaluada. Por esta razón, es posible usar a p como variable independiente. Además, es posible regresar a $y[p(x)]$.

Gráficamente, el cambio de variable involucrado en la transformada de Legendre lleva a representar a la función en términos de sus envolventes; una ecuación que represente a las envolventes determina la curva $y(x)$.



La ecuación de la recta de una de las envolventes se obtiene a partir de su pendiente, p, y su ordenada al origen, ψ, mediante:

$$p = \frac{y - \psi}{x - 0}\,.$$



La *transformada de Legendre* de y es

$$\psi = y - px. \tag{40}$$

Dado que $y = y(x)$ y $x = x(p)$ mediante (39), entonces

$$\psi(p) = y[x(p)] - p\,x[(p).]$$

Es decir, ψ es función de p. Geométricamente, la transformada de Legendre consiste en el conjunto de ordenadas al origen de las envolvente de la curva de $y = y(x)$ en función de las pendientes.

Además, como la diferencial de ψ es

$$d\psi = dy - d(px) = pdx - (pdx + xdp) = -xdp\,,$$

entonces (ver la nota c):

$$\frac{d\psi}{dp} = -x\,. \tag{41}$$

En el caso de una función de varias variables

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \tag{42}$$

la diferencial total es

$$dy = \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k \tag{43}$$

con

$$p_k = \frac{\partial y}{\partial x_k} \tag{44}$$

Los pares $\{x_i, p_i\}$ se conocen como *variables conjugadas*. La transformada de Legendre con p_i como variable natural es

$$\psi[p_i] = y - p_i x_i \tag{45}$$

donde $\psi[p_i]$ es una notación abreviada para $\psi(x_0, \ldots, x_{i-1}, p_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Por extensión, la transformada de Legendre de las variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ a $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ es

$$\psi[p_1, \ldots, p_s] = y - \sum_{k=1}^{s} p_k x_k\,. \tag{46}$$

Es decir, a la función original, se le resta la suma de productos de las variables conjugadas involucradas.

La diferencial total de ψ es

$$d\psi[p_1, \ldots, p_s] = \sum_{k=1}^{s}(-x_k)dp_k + \sum_{k=s+1}^{n} p_k dx_k \tag{47}$$

donde, por extensión de (41):

$$\frac{\partial \psi[p_1, \ldots, p_s]}{\partial p_k} = -x_k, \quad k = 1, \ldots, s \tag{48}$$

para las derivadas de ψ respecto a las nuevas variables, y

$$\frac{\partial \psi[p_1, \ldots, p_s]}{\partial x_k} = p_k, \quad k = s+1, \ldots, n \tag{49}$$

en el caso de las derivadas respecto a las variables que se conservan.

Bibliografía

1. H. Goldstein, Ch. Pole, J. Safko, *Classical Mechanics* 3rd. edition, Addison Wesley, 2014.

2. D. T. Greenwood, *Classical Dynamics* Dover, 1977.

3. L. N. Hand, J. D. Finch, *Analytical mechanics* Cambridge University Press, 1988.

4. T. L. Chow, *Classical Mechanics* 2nd edition, CRC Press, 2013.

5. J. R. Taylor, *Classical Mechanics* University Science Books, 2005.