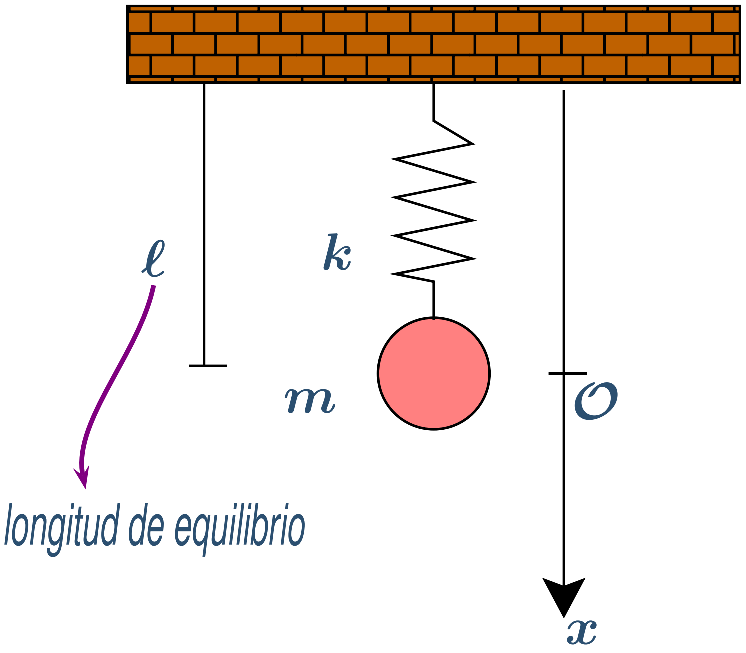
Fundamentos de espectroscopia: Circuitos eléctricos resonantes

Jesús Hernández Trujillo
Facultad de Química, UNAM

Octubre de 2020

Oscilador armónico

Movimiento armónico simple.



Ley de Hooke

$$F = -kx$$

Más la segunda ley de Newton

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Conducen a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Por lo tanto:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (1)$$

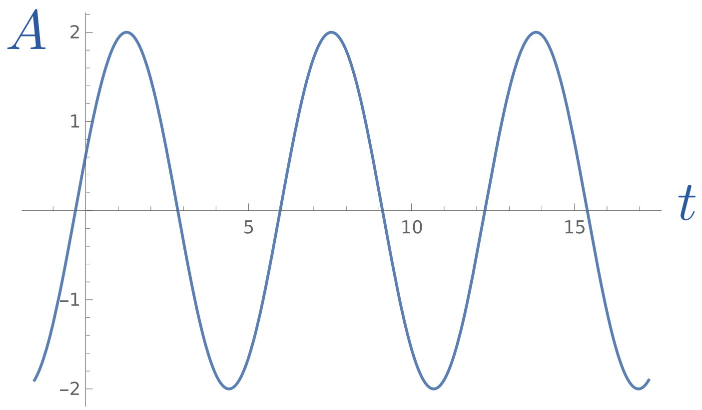
donde $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$: *Frecuencia circular o angular*

Soluciones de (1) :

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \tag{2}$$

A: Amplitud

ϕ: constante de fase

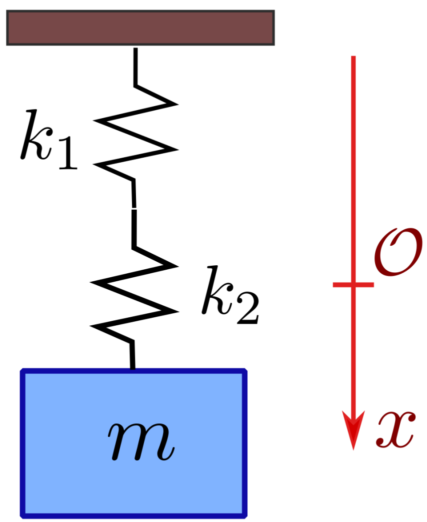


Además

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

Resortes en serie

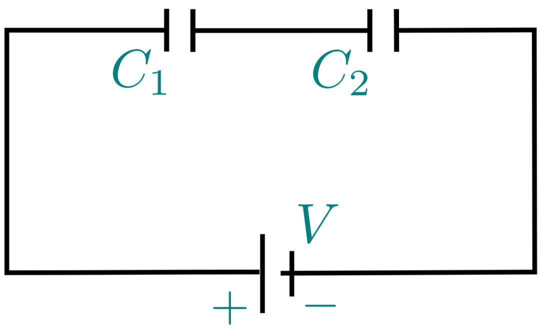


$$x = \quad x_1 + x_2 \quad = -F/k_1 - F/k_2$$
$$= -F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = -\frac{F}{k}$$

donde

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Capacitores en serie

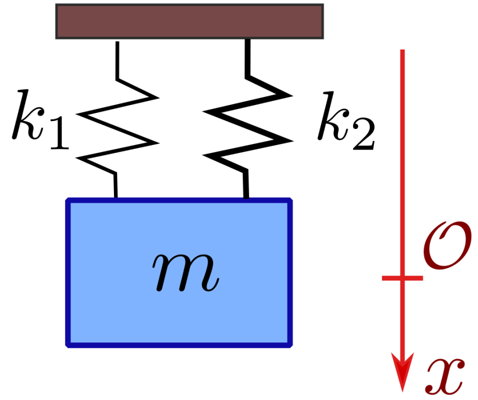


$$V = \quad V_1 + V_2 \quad = Q/C_1 + Q/C_2$$
$$= Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = -\frac{Q}{C}$$

donde

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Resortes en paralelo

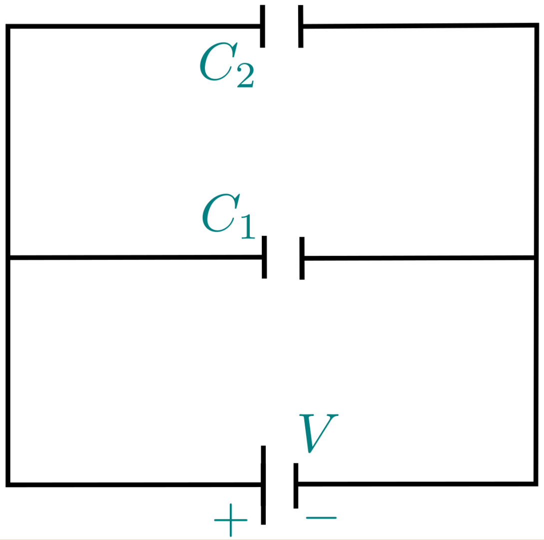


$$\boldsymbol{F = F_1 + F_2 = -k_1 x - k_2 x}$$
$$\boldsymbol{= -(k_1 + k_2)x = -kx}$$

donde

$$\boldsymbol{k = k_1 + k_2}$$

Capacitores en paralelo



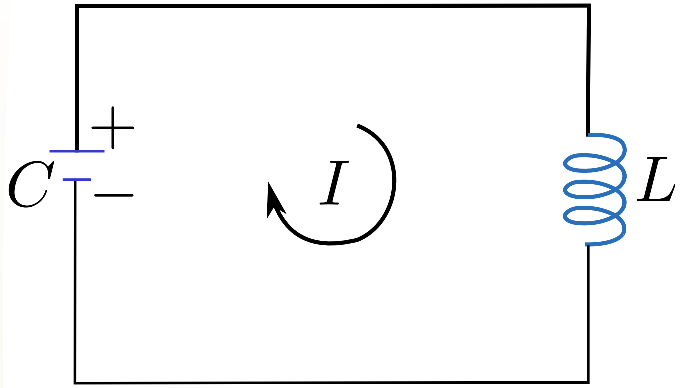
$$\boldsymbol{Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V}$$
$$\boldsymbol{= (C_1 + C_2)V = CV}$$

donde

$$\boldsymbol{C = C_1 + C_2}$$

- Oscilador armónico
- Oscilador amortiguado
- Oscilador amortiguado forzado

Circuito LC



Regla de la espira de Kirchhoff:

$$V_C + V_L = 0 \qquad V_C = q/C$$

La ley de Faraday:

$$V_L = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d[LI]}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Por lo tanto:

$$\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0$$

En $t = 0$: $q = Q_{\mathrm{max}}$

Convención de signo: $I = -dq/dt$

Entonces: $$\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

- ❖ Oscilador armónico
- ❖ Oscilador amortiguado
- ❖ Oscilador amortiguado forzado

Reacomodar términos:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \tag{3}$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

es la frecuencia angular del circuito.

La ec. (3) es formalmente idéntica a la (1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

La carga en el capacitor es:

$$q = Q_{\max} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{4}$$

La corriente en el circuito:

$$I = -\frac{dq}{dt} = I_{\max} \cos(\omega t + \phi) \tag{5}$$

donde

$$I_{max} = Q_{\max}\, \omega$$

⇒ Hay oscilaciones sin partes móviles.

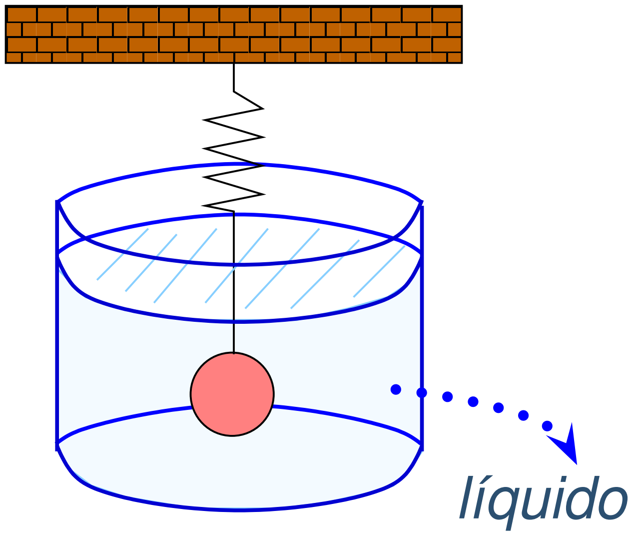
⇒ q en el capacitor e I cambian armónicamente.

⇒ La carga y la corriente están $\pi/2$ rad fuera de fase.

Oscilador amortiguado

- En un movimiento amortiguado, la amplitud de la oscilación disminuye gradualmente en el tiempo.
- La fricción afecta el movimiento.

- Ejemplo:



Aproximación:

Fuerza de fricción proporcional a la velocidad:

$$F_{fric} \sim v$$

Ley de Stokes:

$$F_{fric} = -6\pi\eta r v$$

η: viscosidad, r: radio de la esfera, v: velocidad

Segunda ley de Newton para una partícula sujeta a la acción de una fuerza armónica y a una de amortiguamiento lineal

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda\frac{dx}{dt}$$

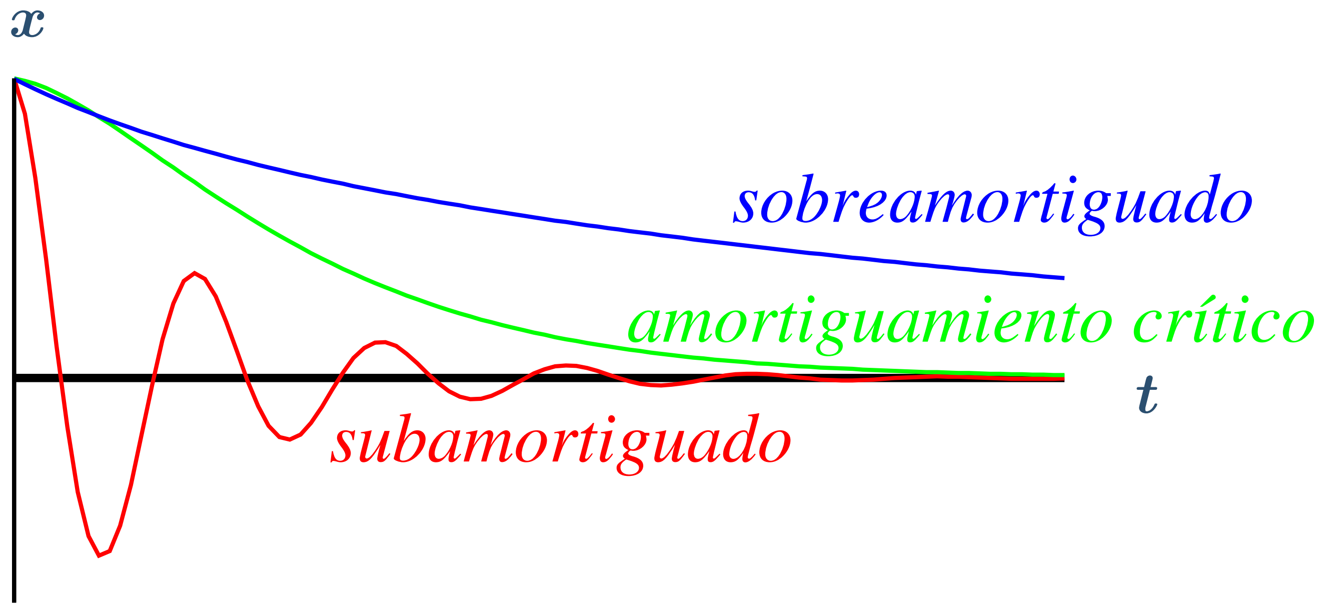
Al reordenar:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{6}$$

donde

- $\omega^2 = k/m$
- $2\gamma = \lambda/m$

Resumen:


x
sobreamortiguado
amortiguamiento crítico
t
subamortiguado

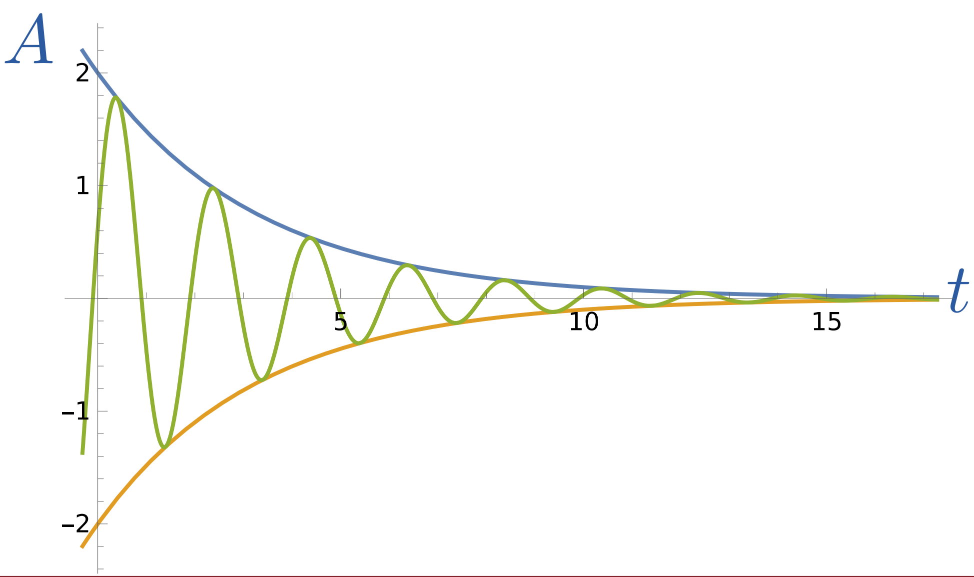
Oscilador subamortiguado:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}(\omega' + \phi) \tag{7}$$

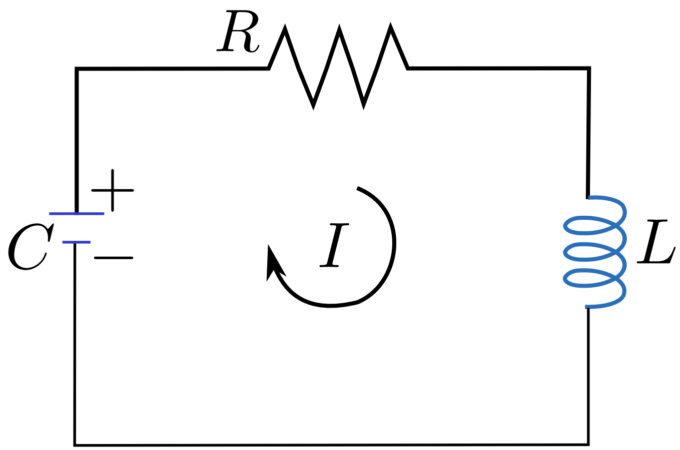
$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

Pseudofrecuencia:

$$\nu' = \frac{\omega'}{2\pi}$$



Circuito RLC en serie



$$V_C + V_L + V_R = 0$$

Por la relación de Ohm

$$V_R = -RI = +R\frac{dq}{dt}$$

Por lo tanto:

$$\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{dq}{dt} = 0$$

Reacomodar términos:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \omega^2 q = 0 \tag{8}$$

El circuito oscila con la frecuencia circular

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

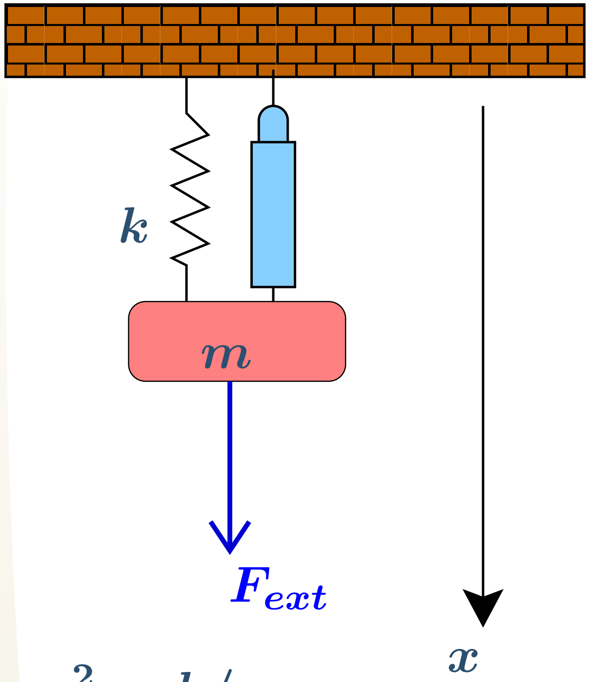
Cuando $R < \sqrt{4L/C}$ (circuito subamortiguado):

$$q(t) = Q_{\max} e^{-Rt/2L} \operatorname{sen}(\omega' + \phi) \tag{9}$$

Analogías entre circuito LRC	y oscilador mecánico amortiguado
carga (q)	posición (x)
Inductancia (L)	masa m
diferencia de potencial (V)	fuerza (F)
inverso de capacitancia ($1/C$)	constante del resorte (k)
resistencia (R)	coeficiente de amortiguamiento (λ)

Oscilador amortiguado forzado

Oscilador armónico amortiguado sujeto a una fuerza externa F_{ext}:



$\omega_0^2 = k/m$

Frecuencia natural del sistema masa-resorte

Segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda\frac{dx}{dt} + F_{ext}$$

En el caso:

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega_f t$$

Fuerza externa periódica con frecuencia circular ω_f

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + \lambda\frac{dx}{dt} = F_0 \cos \omega_f t \qquad (10)$$

La solución de la forma

$$x(t) = x_{\text{amort}}(t) + x_f(t)$$

donde

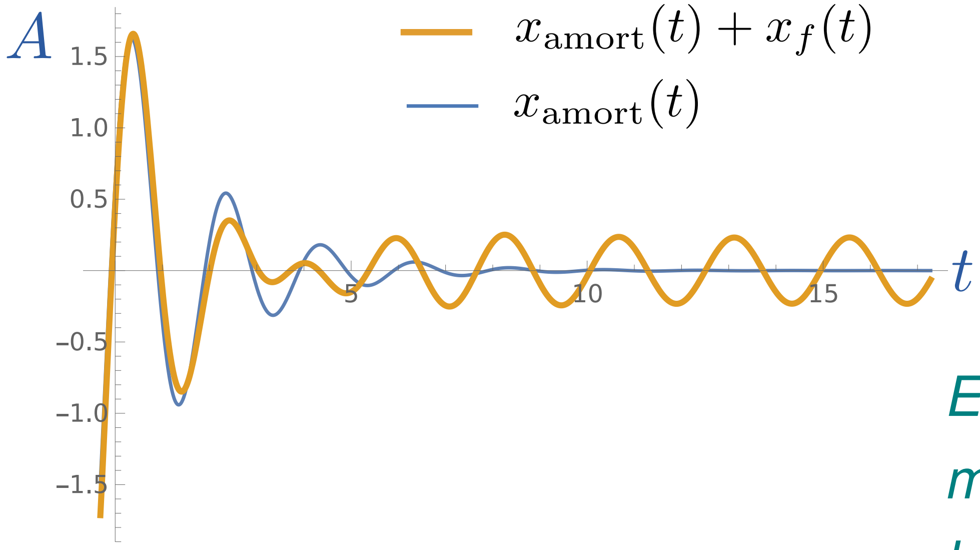
- $x_{\text{amort}}(t)$: solución de la ecuación de movimiento amortiguado.
- Solución particular del movimiento forzado:

$$x_f(t) = A\,\text{sen}(\omega_f t + \alpha) \tag{11}$$

$$A(\omega_f) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 m^2 + \omega_f^2 \lambda^2}} \tag{12}$$

$$\alpha = \arctan \frac{(\omega_0^2 - \omega_f^2)m}{\lambda \omega_f}$$

Gráficamente:



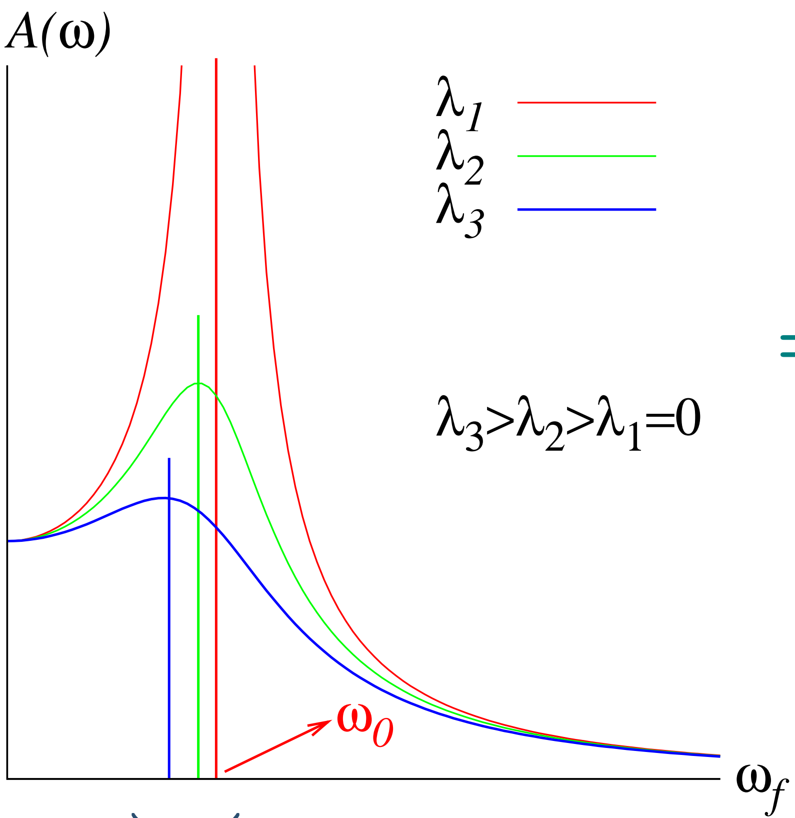
El sistema amortiguado se mantiene en movimiento si se le suministra energía

Dado que

$$\lim_{t\to\infty} x_{\text{amort}}(t) = 0$$

entonces

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_f(t)$$



$$\underbrace{}_{A_{max}}$$

$\Rightarrow$ A es grande cuando $\omega_f \sim \omega_0$ **(resonancia)**

$$A(\omega_f) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 m^2 + \omega_f^2 \lambda^2}}$$

A_{max} en $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$

Observaciones:

- La velocidad máxima del oscilador es

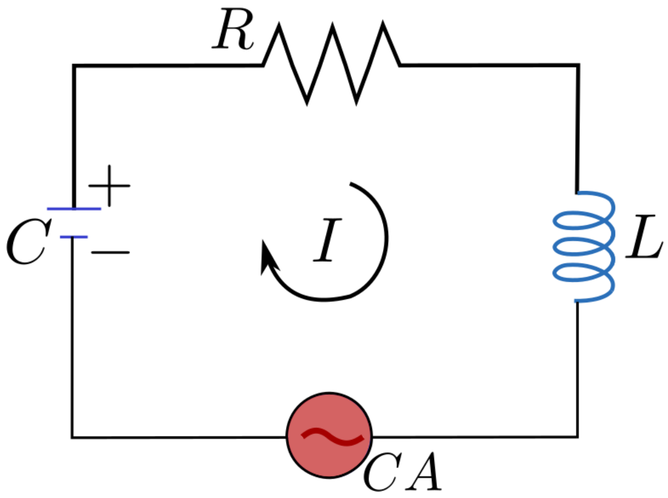
$$v_{max} = \omega_f A = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2-\omega_f^2}{\omega_f}\right)^2 m^2 + \lambda^2}}$$

- En la resonancia, la velocidad y la energía cinética son máximos .

- La gran amplitud en la frecuencia de resonancia se debe a la favorable transferencia de energía hacia el oscilador cuando F_{ext} está en fase con él.

❖ Oscilador armónico
❖ Oscilador amortiguado
❖ Oscilador amortiguado forzado

Circuito RLC de corriente alterna en serie



$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \omega^2 q = V_0 \operatorname{sen} \omega_{\mathrm{CA}} t \quad (13)$$

A tiempos grandes, al derivar $q(t)$ respecto a t:

$$I(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega_{\mathrm{CA}} t + \alpha) \quad (14)$$

$$I_0(\omega_{\mathrm{CA}}) = \frac{\omega_{\mathrm{CA}} V_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega_{\mathrm{CA}}^2\right)^2 L^2 + \omega_{\mathrm{CA}}^2 R^2}} \quad (15)$$

Notar la analogía entre (10)-(12) y (13)-(15).

- Oscilador armónico
- Oscilador amortiguado
- **Oscilador amortiguado forzado**

$$\boxed{A(\omega_f) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 m^2 + \omega_f^2 \lambda^2}}}$$

$$\updownarrow$$

$$\boxed{\omega_0^2 \leftrightarrow \frac{1}{LC} \quad m \leftrightarrow L \quad \lambda \leftrightarrow R}$$

$$\updownarrow$$

$$\boxed{I_0(\omega_{\mathrm{CA}}) = \frac{\omega_{\mathrm{CA}} V_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega_{\mathrm{CA}}^2\right)^2 L^2 + \omega_{\mathrm{CA}}^2 R^2}}}$$

Ejercicio:

Utiliza la analogía entre el oscilador mecánico y el circuito RLC de corriente alterna en serie para obtener (15).

- La corriente depende de la frecuencia.
- La **resonancia** ocurre cuando la corriente es máxima.
- Para un valor de R, frecuencia de resonancia se define como

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Ejemplo:

- Un receptor de radio es un circuito RLC.

  Mediante variaciones en un capacitor, se cambia la frecuencia de resonancia hasta que coincide con la frecuencia de la radiación electromagnética de una estación de radio y se amplifica la señal.

Referencias

1. R. A. Serway & J. W. Jewett, Física para ciencias e ingeniería, Vol. 2, 9. edición, Cengage Brooks/Cole, 2015.

2. W. F. Smith, Waves and Oscillations. A Prelude to Quantum Mechanics, Oxford University Press, 2010.

3. M. Alonso & E. J. Finn, Física, Addison Wesley Iberoamericana, 1995.

4. F. W. Sears & M. W. Zemansky & H. D. Young & R. A. Freedman, Física universitaria, Vol. 2, 11a. edición, Pearson, 2005.