Operadores diferenciales en coordenadas generalizadas

Prof. Jesús Hernández Trujillo. Facultad de Química, UNAM

1 Transformación de coordenadas

La transformación de un vector de posición $\vec{\mathrm{r}} = (x, y, z)$ expresado en coordenadas cartesianas a las nuevas coordenadas $\{u, v, w\}$ se lleva a cabo mediante las ecuaciones de transformación:

$$u = u(x, y, z) \quad v = v(x, y, z) \quad w = w(x, y, z)\,. \tag{1}$$

También es posible realizar la transformación inversa:

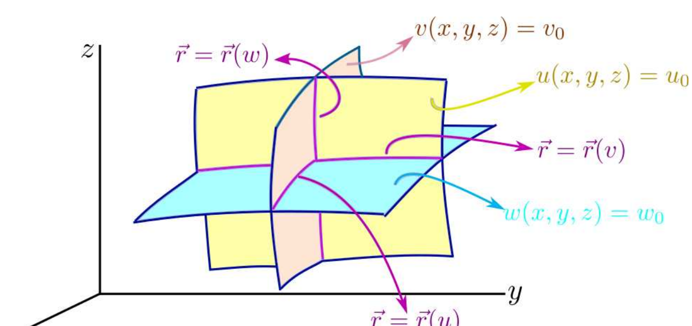
$$x = x(u, v, w) \quad y = y(u, v, w) \quad z = z(u, v, w)\,. \tag{2}$$

Sistemas de coordenadas comunes son las esféricas y las cilíndricas, como se verá más adelante. Al punto con coordenadas cartesianas (x_0, y_0, z_0) le corresponden las coordenadas (u_0, v_0, z_0) en el nuevo sistema y viceversa.

Una vez que se elige (u_0, v_0, z_0), y se sustituye en la ec. (1), se obtiene

$$u_0 = u(x, y, z) \quad v_0 = v(x, y, z) \quad w_0 = w(x, y, z)\,. \tag{3}$$

Se trata de conjuntos de nivel de las funciones correspondientes y geométricamente corresponden a superficies, las llamadas superficies coordenadas. Éstas se presentan esquemáticamente en colores amarillo, salmón y azul, respectivamente, en la siguiente figura.



Asimismo, la intersección entre las superficies coordenadas da lugar a las curvas coordenadas, representadas en morado en la misma figura. Por ejemplo, la intersección entre las superficies $v = v_0$ y $w = w_0$ es la curva paramétrica $\vec{r} = \vec{r}(u)$ y, debido a la ec. (2):

$$\vec{r}(u) = (x(u), y(u), z(u))$$

De manera análoga se expresan las curvas $\vec{r}(v)$ y $\vec{r}(u)$.

Aunque en muchas aplicaciones la base canónica $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ es apropiada para representar cantidades vectoriales en coordenadas cartesianas, en otros sistemas es conveniente usar otros conjuntos de vectores base.

Dos opciones a considerar en las coordenadas u, v, w son

$$\begin{aligned}
&\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w \rightarrow \text{vectores unitarios tangentes a la curvas coordenadas} \\
&\hat{e}^u, \hat{e}^v, \hat{e}^w \rightarrow \text{vectores unitarios perpendiculares a la curvas coordenadas}
\end{aligned}$$

En el primer caso, se toma en cuenta que los vectores derivada de una trayectoria son tangentes a ésta:

$$\hat{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \hat{e}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \quad \hat{e}_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \tag{4}$$

donde

$$h_u = \left|\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|\right|, \quad h_v = \left|\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\right|, \quad h_w = \left|\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right|\right| \tag{5}$$

son los llamados coeficientes métricos o factores de escala. Asimismo, al considerar que los vectores gradiente son perpendiculares a las curvas de nivel, los vectores unitarios correspondientes son

$$\hat{e}^u = \frac{1}{H_u}\nabla u(x,y,z), \quad \hat{e}^v = \frac{1}{H_v}\nabla v(x,y,z), \quad \hat{e}^w = \frac{1}{H_w}\nabla w(x,y,z) \tag{6}$$

donde

$$H_u = ||\nabla u(x,y,z)||\,, \quad H_v = ||\nabla v(x,y,z)||\,, \quad H_w = ||\nabla w(x,y,z)|| \tag{7}$$

El resto de la discusión se restringe a sistemas de coordenadas ortogonales, aquellos donde las superficies coordenadas son perpendiculares entre sí. En tales, casos:

$$\hat{e}_u = \hat{e}^u, \quad \hat{e}_v = \hat{e}^v, \quad \hat{e}_w = \hat{e}^w \tag{8}$$

y se puede demostrar que

$$h_u = \frac{1}{H_u}, \quad h_v = \frac{1}{H_v}, \quad h_w = \frac{1}{H_w} \tag{9}$$

Debido a la ec. (8), en lo que sigue se utilizará la base $\{\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w\}$.

2 Operador diferencial

A continuación se presentan los operadores diferenciales más comunes en términos de sistemas de coordenadas ortogonales. Como ejemplo, se obtiene la expresión del operador gradiente. Sea el campo escalar

$$f = f(x, y, z)$$

cuyo gradiente en coordenadas cartesianas es

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}\,.$$

Al expresar f en el sistema u, v, w y tomando en consideración la ec. (1):

$$f(u, v, w) = f\left(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)\right),$$

por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\nabla f = \quad & \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\imath} \\
& + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\hat{\jmath} \\
& + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\hat{k}
\end{aligned}$$

Esta expresión se puede reacomodar de la siguiente manera tomando las sumas por cada columna:

$$\begin{aligned}
\nabla f = \quad & \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}\right) \\
& + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\hat{k}\right) \\
& + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}\hat{k}\right)
\end{aligned}$$

Al factorizar las derivadas parciales de f en cada paréntesis, se obtiene:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial f}{\partial v}\nabla v + \frac{\partial f}{\partial w}\nabla w$$

A continuación se involucran los vectores base y coeficientes métricos. De las ecs. (6), (8) y (9):

$$\nabla u = H_u \hat{e}^u = \frac{1}{h_u}\hat{e}_u, \quad \nabla v = H_v \hat{e}^v = \frac{1}{h_v}\hat{e}_v, \quad \nabla w = H_w \hat{e}^w = \frac{1}{h_w}\hat{e}_w$$

El resultado final es:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{e}_w$$

Frecuentemente es de interés utilizar un sistema de coordenadas diferente a las rectangulares para campos escalares, $f(u,v,w)$, y vectoriales, $\vec{F} = f_u(u,v,w)\hat{e}_u + f_v(u,v,w)\hat{e}_v + f_w(u,v,w)\hat{e}_w$. A continuación, se presentan los operadores más comunes:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{e}_w \tag{10}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right] \tag{11}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial\left(f_u h_v h_w\right)}{\partial u} + \frac{\partial\left(f_v h_u h_w\right)}{\partial v} + \frac{\partial\left(f_w h_u h_v\right)}{\partial w}\right] \tag{12}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{e}_u & h_v\hat{e}_v & h_w\hat{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ f_u h_u & f_v h_v & f_w h_w \end{vmatrix} \tag{13}$$

Los vectores base y factores de escala se obtienen mediante las ecs. (4) y (5).

Adicionalmente, cabe mencionar que el jacobiano para realizar integrales múltiples es $j(u,v,w) = h_u h_v h_w$ de tal manera que

$$dx\,dy\,dz = h_u h_v h_w\,du\,dv\,dw$$

3 Coordenadas esféricas

El sistema de coordenadas esféricas está definido por las ecuaciones de transformación

$$x = r\,\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = r\,\cos\theta \tag{14}$$

donde

$$r \geq 0, \quad \theta \in [0,\pi], \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

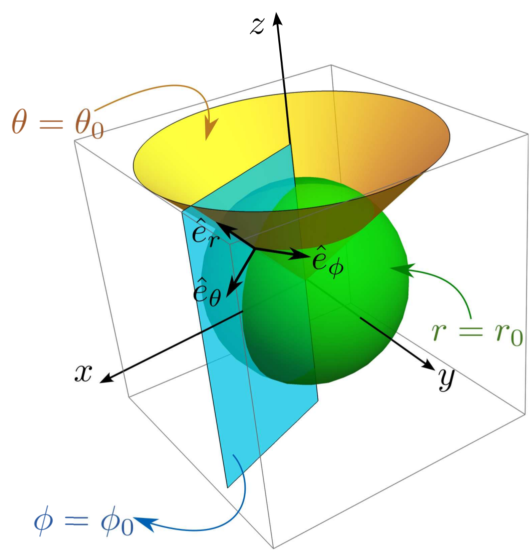
de tal manera que el vector de posición es

$$\vec{\mathrm{r}} = \left(r\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, r\,\mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\theta, r\,\cos\theta\right). \tag{15}$$

Las ecuaciones de la transformación inversa se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones (14) para las variables $\{r, \theta, \phi\}$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan\left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right], \quad \phi = \arctan\left[\frac{y}{x}\right] \tag{16}$$

Las superficies coordenadas son esferas, conos y semiplanos, como se muestra en la figura.



Las derivadas parciales del vector de posición, ec. (15), son

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\cos\phi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (r\, \cos\phi\, \cos\theta, r \operatorname{sen}\phi\, \cos\theta, -r \operatorname{sen}\theta)$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, r\, \cos\phi \operatorname{sen}\theta, 0)$$

A partir de ellas, mediante la ec. (5) se obtienen los factores de escala $\{h_r, h_\theta, h_\phi\}$ y los vectores base, $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$:

$$h_r = 1\,, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \operatorname{sen}\theta\,, \tag{17}$$
$$\hat{e}_r = (\cos\phi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$
$$\hat{e}_\theta = (\cos\phi\, \cos\theta, \operatorname{sen}\phi\, \cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)$$
$$\hat{e}_\phi = (-\operatorname{sen}\phi, \cos\phi, 0) \tag{18}$$

Además, $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_r \cdot \hat{e}_\phi = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\phi = 0$. Estos vectores apuntan hacia donde crecen las coordenadas esféricas, y se presentan esquemáticamente en la figura anterior. Adicionalmente, el elemento diferencial de volumen es $dV = h_r h_\theta h_\phi\, dr d\theta d\phi = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr d\theta d\phi$.

En el caso de campos escalares, de acuerdo con las ecs. (10), (11), (17) y (18), el gradiente y laplaciano en coordenadas esféricas son:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{e}_\phi \tag{19}$$

$$\nabla^2 f = = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{20}$$

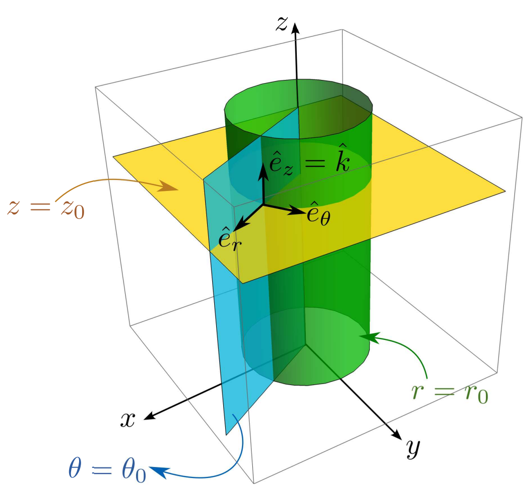
Ejercicio: Obtén la expresión de la divergencia de un campo vectorial en coordenadas esféricas.

4 Coordenadas cilíndricas

En el sistema de coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\mathrm{r}} = (r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta, z)$$

En este caso, las superficies coordenadas son cilíndros, planos y semiplanos, como se muestra en la figura.



Además:

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{r}}}{\partial r} = (\cos\theta, \mathrm{sen}\theta, 0)\,, \quad \frac{\partial \vec{\mathrm{r}}}{\partial \theta} = (-r\mathrm{sen}\theta, r\cos\theta, 0)\,, \quad \frac{\partial \vec{\mathrm{r}}}{\partial z} = (0,0,1)$$

Por lo tanto:

$$h_r = 1\,, \quad h_\theta = r\,, \quad h_z = 1 \tag{21}$$

$$\hat{e}_r = (\cos\theta, \mathrm{sen}\theta, 0)\,, \quad \hat{e}_\theta = (-\mathrm{sen}\theta, \cos\theta, 0)\,, \quad \hat{e}_z = (0,0,1) = \hat{k} \tag{22}$$

Nótese que $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_r \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_z = 0$. Los vectores base se muestran en la figura anterior. Además, $dV = r dr d\theta dz$.

Al usar (10)–(12) y (21)–(22):

- El gradiente de un campo escalar:

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\left(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(0,0,1\right) \\
&= \left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}, \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

- El laplaciano de un campo escalar:

$$
\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
$$

- La divergencia de un campo vectorial

$$
\nabla \cdot \vec{\mathrm{F}} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, f_r\right) + \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\, f_z\right)\right]
$$

5 Bibliografía

1. H. P. Hsu, *Applied Vector Analysis*, Harcourt Brace Jovanovich, 1986.