

Formas cuadráticas y series de Taylor

Jesús Hernández Trujillo
Facultad de Química, UNAM

Formas cuadráticas

- En un punto crítico, en ocasiones una función $f(x, y)$ puede aproximarse localmente a una función cuadrática (serie de Taylor a orden dos).

Formas cuadráticas

- En un punto crítico, en ocasiones una función $f(x, y)$ puede aproximarse localmente a una función cuadrática (serie de Taylor a orden dos).
- Ecuación cuadrática en dos variables:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$$

Formas cuadráticas

- En un punto crítico, en ocasiones una función $f(x, y)$ puede aproximarse localmente a una función cuadrática (serie de Taylor a orden dos).
- Ecuación cuadrática en dos variables:

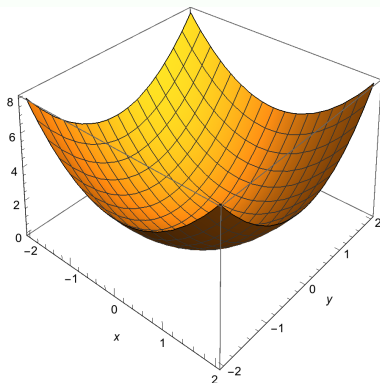
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$$

- Forma cuadrática en dos variables:

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

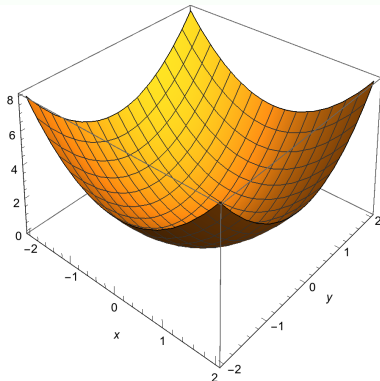
Ejemplos de función cuadrática:

- $f(x, y) = x^2 + y^2$



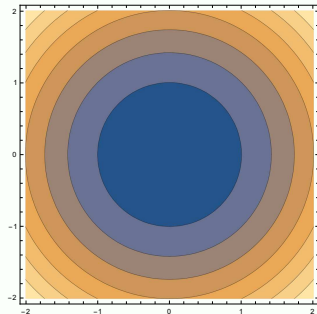
Ejemplos de función cuadrática:

- $f(x, y) = x^2 + y^2$

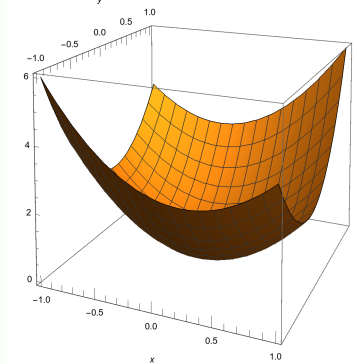


Contornos: $f(x, y) = k$

circunferencias

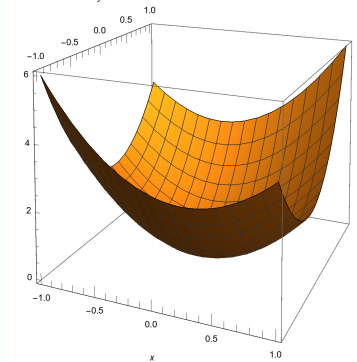


- $f(x, y) = 2x^2 + xy + 3y^2$

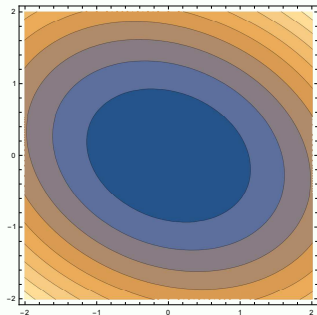


¿Contornos?

- $f(x, y) = 2x^2 + xy + 3y^2$



¿Contornos?



Elipses

Gráficas de las ecuaciones cuadráticas: cónicas

Cualquier forma cuadrática

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

puede expresarse como un producto matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X^t A X$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Forma cuadrática en n variables $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_i^n \sum_j^n \lambda_{ij} x_i x_j$$

En forma matricial:

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^t \Lambda X$$

donde la matriz Λ tiene elementos $(\Lambda)_{ij} = \lambda_{ij}$

A partir de la matriz Λ es posible obtener una matriz simétrica

$$A = \frac{1}{2} (\Lambda + \Lambda^t)$$

tal que

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^t \Lambda X$$

A es simétrica pues $A^t = A$

Además, toda matriz simétrica es diagonalizable con los elementos diagonales **reales**.

Mediante una transformación lineal, es posible reducir cualquier forma cuadrática a la forma canónica:

$$q(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = \sum_i^n d'_i (x'_i)^2 = X'^t D X'$$

en las variables $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$, donde

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Procedimiento de diagonalización de A :

- A partir de A se obtiene la matriz diagonal D , ambas de dimensión n , mediante la ecuación de valores propios:

$$A\mathbf{v} = d\mathbf{v},$$

o de manera equivalente:

$$A\mathbf{v} = d\mathbf{I}\mathbf{v}; \quad (A - d\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$$

Procedimiento de diagonalización de A :

- A partir de A se obtiene la matriz diagonal D , ambas de dimensión n , mediante la ecuación de valores propios:

$$A\mathbf{v} = d\mathbf{v},$$

o de manera equivalente:

$$A\mathbf{v} = dI\mathbf{v}; \quad (A - dI)\mathbf{v} = 0$$

- Los valores propios $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ se obtienen a partir de

$$\det(A - dI) = 0$$

Se trata en encontrar las raíces de un polinomio de grado n en la variable d .

- Para obtener los vectores propios $\{\mathbf{v}^i\}$, se sustituyen los $\{d_i\}$ en la ecuación de valores propios :

$$(A - d_1 I) \mathbf{v}^1 = 0, \quad (A - d_2 I) \mathbf{v}^2 = 0 \dots$$

- Para obtener los vectores propios $\{\mathbf{v}^i\}$, se sustituyen los $\{d_i\}$ en la ecuación de valores propios :

$$(A - d_1 I) \mathbf{v}^1 = 0, \quad (A - d_2 I) \mathbf{v}^2 = 0 \dots$$

Los vectores propios en forma de columnas:

$$\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ \vdots \\ v_n^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ \vdots \\ v_n^2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{v}^n = \begin{pmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix}$$

- Se pueden transformar las coordenadas espaciales

$$(x_1, x_2, \dots) \rightarrow (x'_1, x'_2, \dots)$$

- Se pueden transformar las coordenadas espaciales

$$(x_1, x_2, \dots) \rightarrow (x'_1, x'_2, \dots)$$

La transformación lineal (rotación de coordenadas) se lleva a cabo con la matriz

$$V = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & \vdots \\ v_1^2 & v_2^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{v}^1 & \mathbf{v}^2 & \dots \end{pmatrix}$$

- Se pueden transformar las coordenadas espaciales

$$(x_1, x_2, \dots) \rightarrow (x'_1, x'_2, \dots)$$

La transformación lineal (rotación de coordenadas) se lleva a cabo con la matriz

$$V = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & \vdots \\ v_1^2 & v_2^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{v}^1 & \mathbf{v}^2 & \dots \end{pmatrix}$$

- La matriz diagonal es $D = V^t A V$
- Las nuevas coordenadas son $X' = V^t X$

Ejemplo: Describe la cónica $2x^2 + xy + 3y^2 = 2$

La ecuación puede escribirse en forma matricial como

$$X^t A X = 2, \quad \text{donde} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes etapas:

- 1 Encuentra la expresión de Λ .

Ejemplo: Describe la cónica $2x^2 + xy + 3y^2 = 2$

La ecuación puede escribirse en forma matricial como

$$X^t A X = 2, \quad \text{donde} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes etapas:

- 1 Encuentra la expresión de Λ .

El resultado es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

2 Diagonaliza la matriz A .

- 2 Diagonaliza la matriz A .

Resultado:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.207 & 0 \\ 0 & 1.793 \end{pmatrix}$$

- 3 Obtén la matriz V .

- 2 Diagonaliza la matriz A .

Resultado:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.207 & 0 \\ 0 & 1.793 \end{pmatrix}$$

- 3 Obtén la matriz V .

Resultado: Dado que los vectores propios son:

$$\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 0.383 \\ 0.924 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} -0.924 \\ 0.383 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$V = \begin{pmatrix} 0.383 & -0.924 \\ 0.924 & 0.383 \end{pmatrix}$$

- 4 Realiza la transformación a las nuevas coordenadas, $X' = V^t X$.

- 4 Realiza la transformación a las nuevas coordenadas, $X' = V^t X$.

Resultado:

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = V^t X = \begin{pmatrix} 0.383x + 0.924y \\ -0.924x + 0.383y \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$x' = 0.383x + 0.924y$$

$$y' = -0.924x + 0.383y$$

- 4 Realiza la transformación a las nuevas coordenadas, $X' = V^t X$.

Resultado:

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = V^t X = \begin{pmatrix} 0.383x + 0.924y \\ -0.924x + 0.383y \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$x' = 0.383x + 0.924y$$

$$y' = -0.924x + 0.383y$$

- 5 Expresa $\{x, y\}$ en términos de $\{x', y'\}$.

- 4 Realiza la transformación a las nuevas coordenadas, $X' = V^t X$.

Resultado:

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = V^t X = \begin{pmatrix} 0.383x + 0.924y \\ -0.924x + 0.383y \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$x' = 0.383x + 0.924y$$

$$y' = -0.924x + 0.383y$$

- 5 Expresa $\{x, y\}$ en términos de $\{x', y'\}$.

$$x = 0.383x' - 0.924y'$$

$$y = 0.924x' + 0.383y'$$

6 Sustituye x y y en

$$2x^2 + xy + 3y^2 = 2$$

- 6 Sustituye x y y en

$$2x^2 + xy + 3y^2 = 2$$

Resultado:

Se obtiene la ecuación de la cónica en los ejes x' y y' :

$$3.207(x')^2 + 1.793(y')^2 = 2$$

Este resultado se obtiene también directamente al usar los valores propios d_1 y d_2 y escribir la forma cuadrática canónica.

6 Sustituye x y y en

$$2x^2 + xy + 3y^2 = 2$$

Resultado:

Se obtiene la ecuación de la cónica en los ejes x' y y' :

$$3.207(x')^2 + 1.793(y')^2 = 2$$

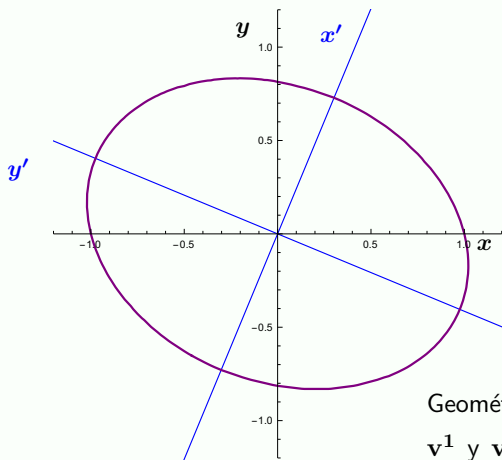
Este resultado se obtiene también directamente al usar los valores propios d_1 y d_2 y escribir la forma cuadrática canónica.

La ecuación se puede reacomodar:

$$\left(\frac{x'}{0.790}\right)^2 + \left(\frac{y'}{1.056}\right)^2 = 1$$

¿A qué tipo de lugar geométrico corresponde?

Se trata de una elipse:



Geométricamente, los vectores $\mathbf{v}^1$ y $\mathbf{v}^2$ definen los nuevos ejes tras la rotación de coordenadas.

Series de Taylor

Expansión de $z = f(x, y)$ a segundo orden alrededor de $\bar{r}_0 = (x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\bar{r}_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\bar{r}_0} (y - y_0) \right] + \\
 & \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{\bar{r}_0} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{\bar{r}_0} (x - x_0)(y - y_0) \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{\bar{r}_0} (y - y_0)^2 \right] + \dots
 \end{aligned}$$

Si $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} (x) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0)} (y) \right] +$$

$$\frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{\bar{r}_0} (x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} (xy) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} (y)^2 \right] + \dots$$

Si $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(0, 0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} (x) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0)} (y) \right] + \\
 &\quad \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{\bar{r}_0} (x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} (xy) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} (y)^2 \right] + \dots \\
 &= f(0, 0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{(0,0)} \cdot (x, y) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} (x, y) \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array} \right) \Big|_{(0,0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots
 \end{aligned}$$

Si $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(0, 0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} (x) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0)} (y) \right] + \\
 &\quad \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{\bar{r}_0} (x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} (xy) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} (y)^2 \right] + \dots \\
 &= f(0, 0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{(0,0)} \cdot (x, y) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} (x, y) \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array} \right) \Big|_{(0,0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots \\
 &= f(0, 0) + \nabla f|_{(0,0)} \cdot (x, y) + (x, y) H|_{(0,0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La matriz

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

se llama el Hessiano de $f(x, y)$.

Si $f(0, 0) = 0$ y es un punto crítico:

$$f(x, y) = \frac{1}{2!}(x, y) \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2)$$

$f(x, y)$ se comporta localmente como una función cuadrática.

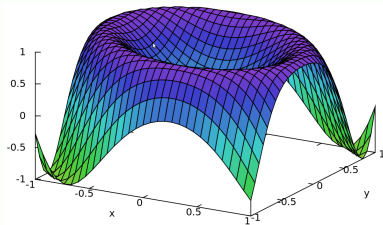
⇒ En un mínimo de una función, a segundo orden se tiene la aproximación armónica.

Ejemplo: Expresa $f(x, y) = \sin(2x^2 + xy + 3y^2)$ como serie de Taylor a segundo orden alrededor de $(0, 0)$.

$$f(0, 0) = 0$$

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$



Ejemplo: Expresa $f(x, y) = \text{sen}(2x^2 + xy + 3y^2)$ como serie de Taylor a segundo orden alrededor de $(0, 0)$.

$$f(0, 0) = 0$$

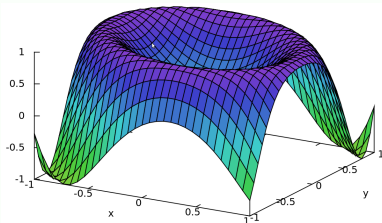
$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + xy + 3y^2 + \dots \end{aligned}$$

Valores propios de H: 6.414, 3.586;
positivos, se trata de un mínimo.

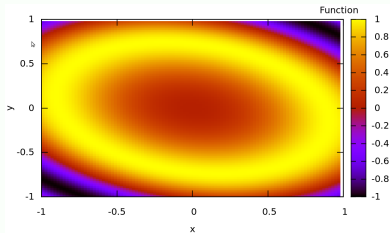
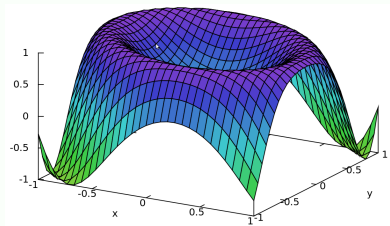


En Mathematica, para obtener la matriz Hessiana, aplica sucesivamente el operador gradiente:

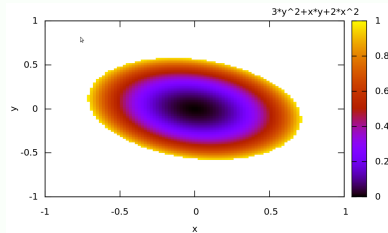
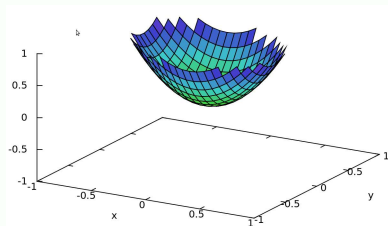
`Grad[Grad[f[x,y],{x,y}],{x,y}]`

Gráficamente:

$$\sin(2x^2 + xy + 3y^2)$$



$$2x^2 + xy + 3y^2$$



Bibliografía

- ① S. Lang, *Linear Algebra*, 3rd. edition, Springer, 1987.
- ② D. A. MQuarrie, *Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, University Science Books, Sausalito, 2003.
- ③ J. E. Marsden, A. J. Tromba *Vector Calculus*, 6th. edition, W. H. Freeman, New York, 2011.