Curso de Física I: Cinemática

Jesús Hernández Trujillo
Facultad de Química, UNAM

Sistemas de referencia inerciales

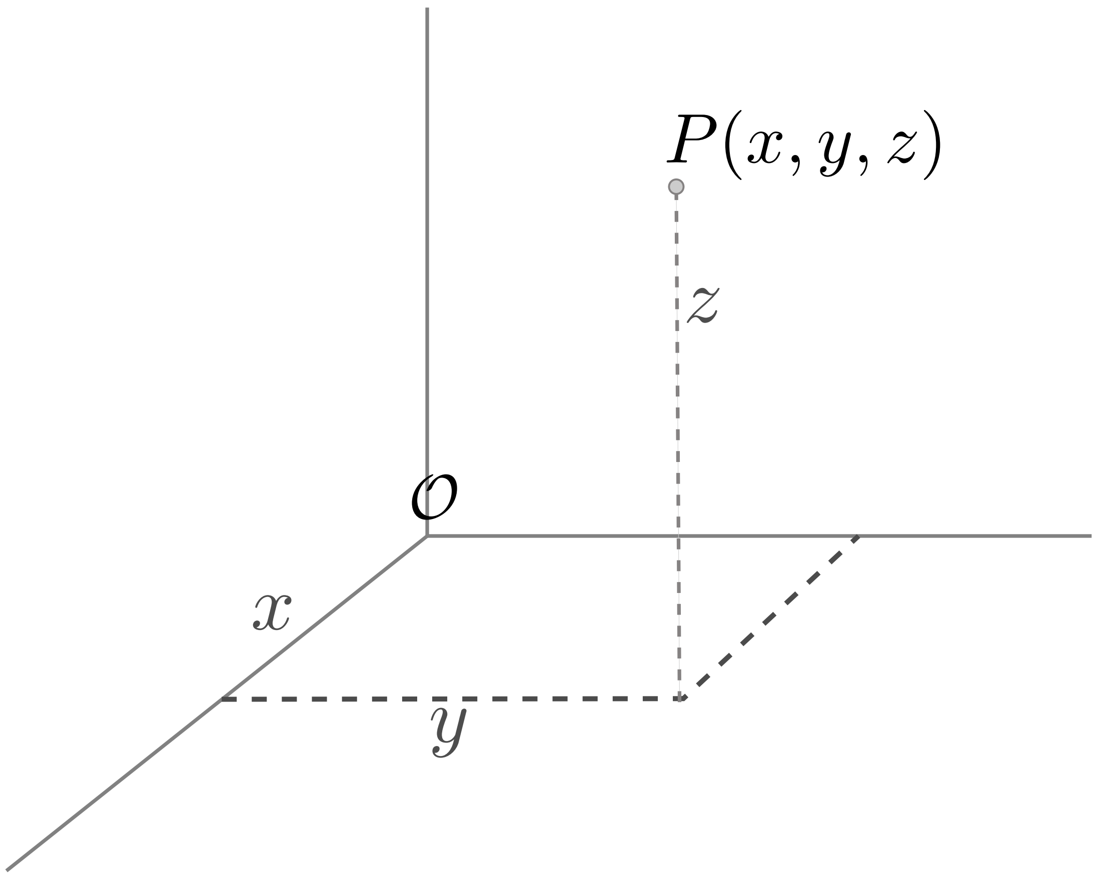
Para describir el movimiento de un objeto, hay que elegir un sistema de referencia que consiste en:

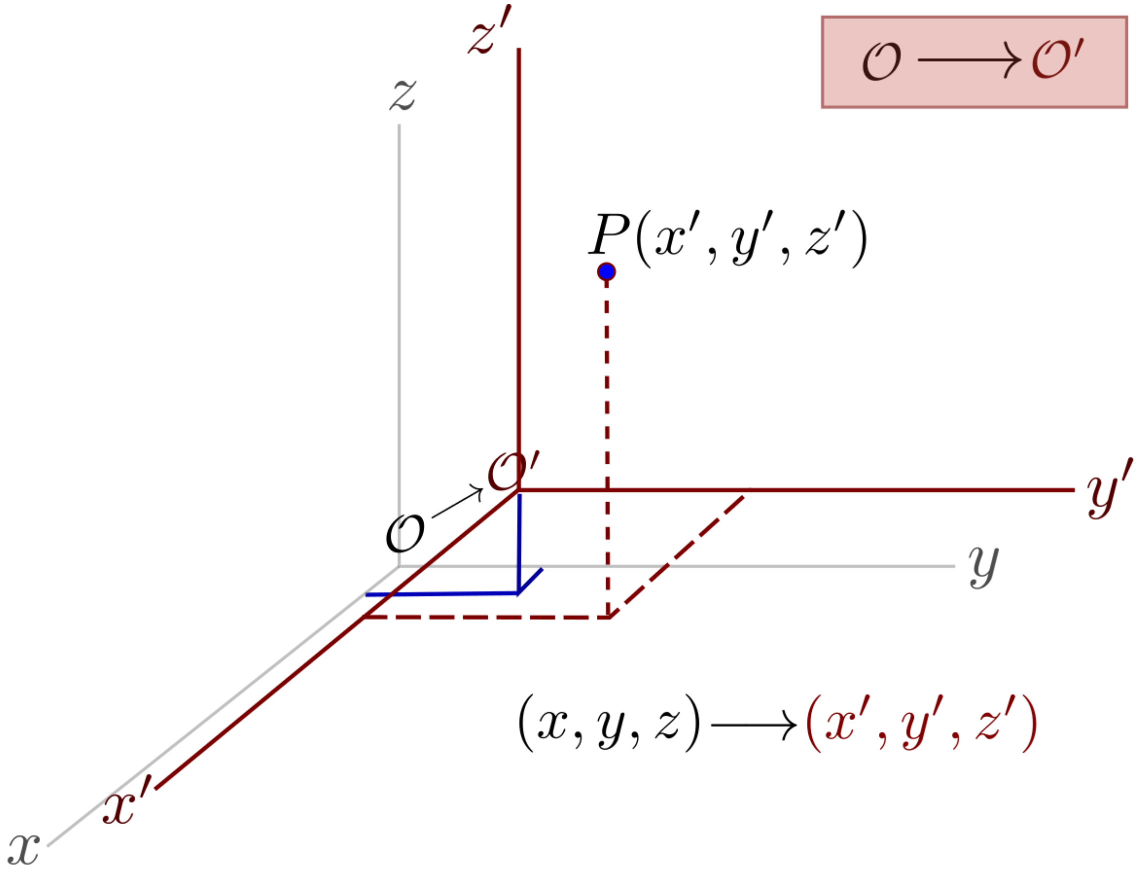
- Un sistema de coordenadas.
- Un reloj.

$\Rightarrow$ Reposo y movimiento son relativos al sistema de referencia.

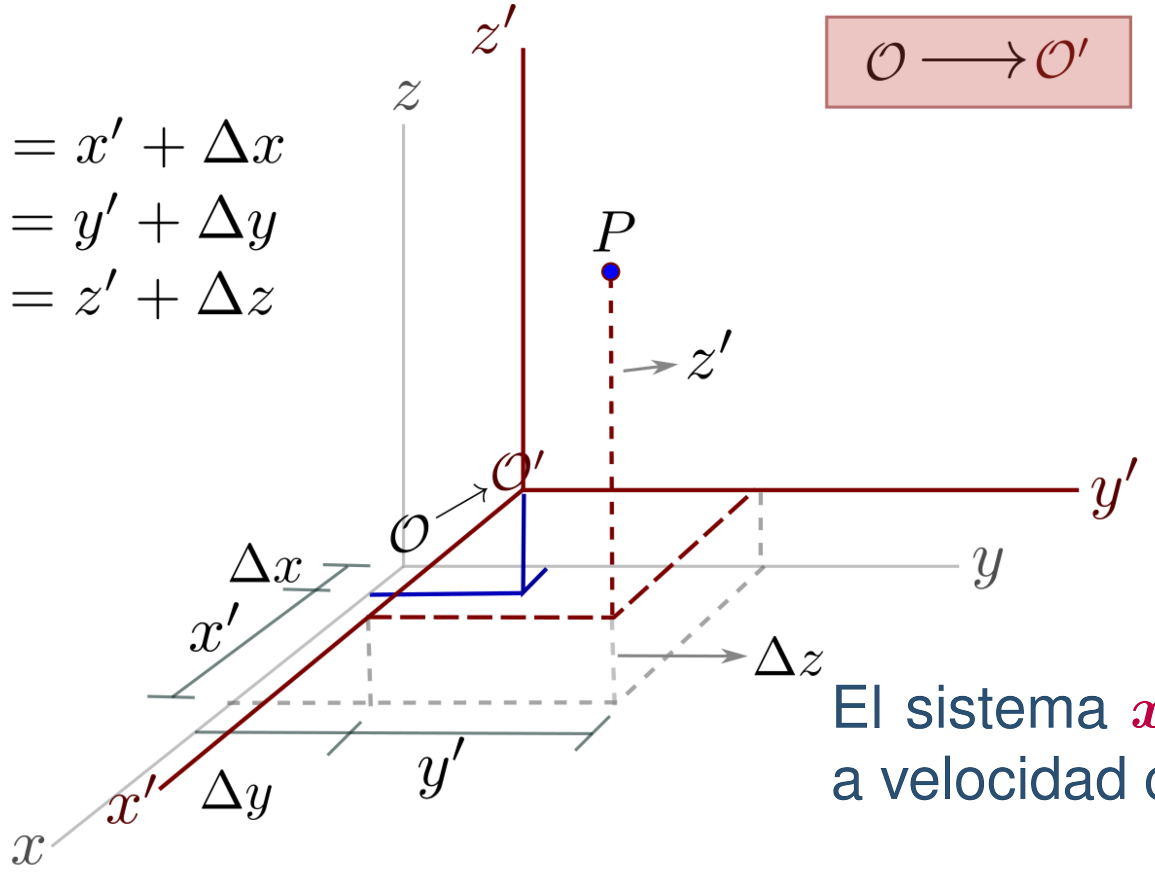
$\Rightarrow$ Cuerpo libre: aquél que no experimenta interacciones con el exterior.

$\Rightarrow$ En un sistema de referencia inercial un cuerpo libre se mueve a velocidad constante.


$P(x, y, z)$
z
O
x
y


$\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$
z'
z
$P(x', y', z')$
$\mathcal{O}'$
$\mathcal{O}$
y'
y
$(x, y, z) \longrightarrow (x', y', z')$
x'
x

$$x = x' + \Delta x$$
$$y = y' + \Delta y$$
$$z = z' + \Delta z$$



El sistema $x'y'z'$ se mueve a velocidad constante

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath} + v_{0z}\hat{k}$$

respecto al sistema xyz.

El origen $\mathcal{O}'$ coincide con $\mathcal{O}$ cuando $t = 0$.

$$\Delta x = v_{0x}t, \quad \Delta y = v_{0y}t, \quad \Delta z = v_{0z}t$$

Las coordenadas $P(x, y, z)$ y $P'(x', y', z')$ del mismo punto se relacionan mediante:

$$x' = x - v_{0x}t, \qquad y' = y - v_{0y}t, \qquad z' = z - v_{0z}t \quad (1)$$

El tiempo es el mismo en ambos casos:

$$t' = t \quad (2)$$

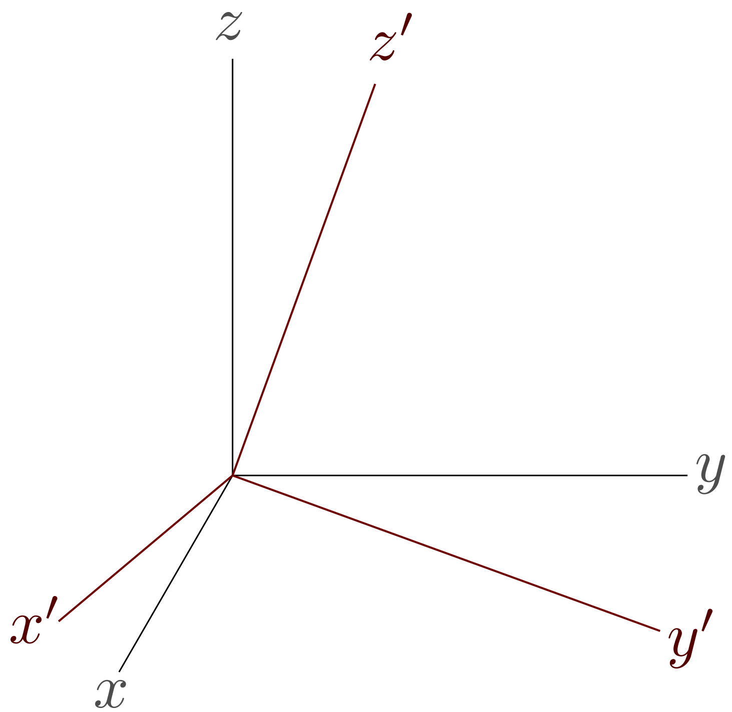
Las ecuaciones (1) y (2) se conocen como *transformaciones de Galileo.*

En contraste, las transformaciones de Lorentz son:

$$x' = \frac{x - v_{0x}t}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad y' = \frac{y - v_{0y}t}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad z' = \frac{z - v_{0z}t}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}},$$

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

Adicionalmente, el sistema $x'y'z'$ puede estar rotado respecto al sistema xyz:



Esta figura NO debe interpretarse como que el sistema $x'y'z'$ esté rotando respecto al sistema xyz.

☞ La elección de un sistema de referencia inercial particular es una cuestión de conveniencia

- De acuerdo con Newton:

  “El tiempo, absoluto, matemático, real, es independiente de por sí y por su esencia y no tiene relación con nada del exterior”

- La propiedad inercial indica:

  (a) La uniformidad del espacio y del tiempo: todas las posiciones de una partícula libre en el espacio, en todos los instantes de tiempo, son equivalentes.

  (b) La isotropía del espacio: Las diferentes direcciones en el espacio son equivalentes.

Además:

- En un sistema de referencia inercial se cumplen las leyes de Newton.
- Existen tantos sistemas de referencia inerciales como se deseen.

De (1), para la componente x:

$$\frac{dx'}{dt} = v'_x = \frac{d(x - v_{0x}t)}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d(v_{0x}t)}{dt} = v_x - v_{0x}$$

Además:

$$\frac{dv'_x}{dt} = a'_x = \frac{d(v_x - v_{0x})}{dt} = \frac{dv_x}{dt} - \cancel{\frac{dv_{0x}}{dt}} = a_x$$

- Principio de relatividad en mecánica clásica:

  “Para iguales condiciones iniciales, los fenómenos mecánicos transcurren de igual forma en todos los sistemas de referencia inerciales”

- No es posible determinar la velocidad absoluta de un objeto; su movimiento absoluto no tiene efecto sobre su comportamiento.

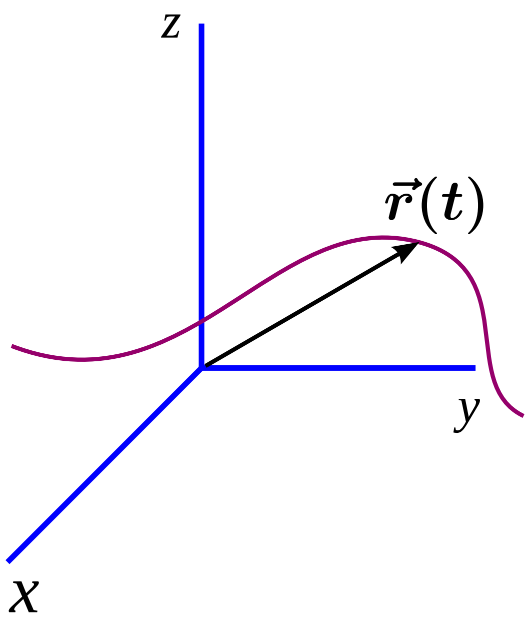
Cinemática

- La cinemática proporciona los conceptos necesarios para describir el movimiento.
- Se utiliza un **sistema de referencia inercial.**
- La **trayectoria** de un objeto en movimiento especifica su ubicación en el espacio como función del tiempo.
- Aproximación de partícula: Un objeto se ubica en un punto. En $\Re^3$:

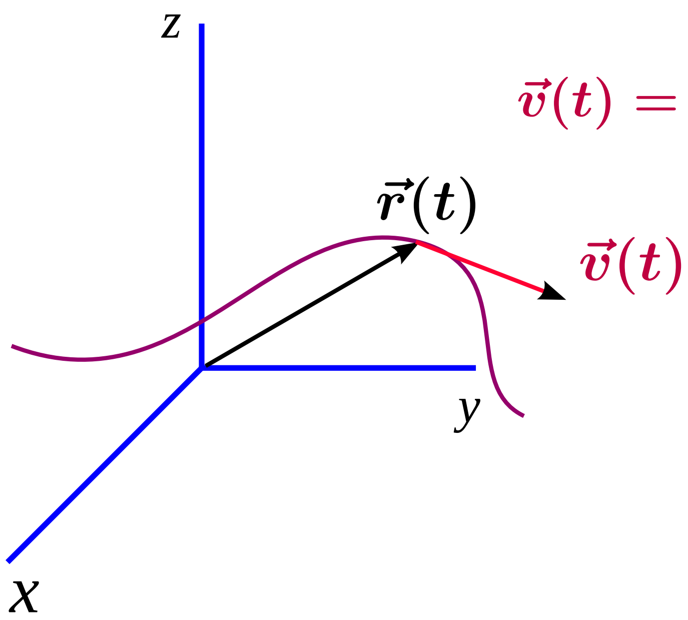
$$\vec{r} = (x, y, z) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$$

☞ A veces, esta aproximación no es suficiente (ejemplo: rotación interna)

Gráficamente:



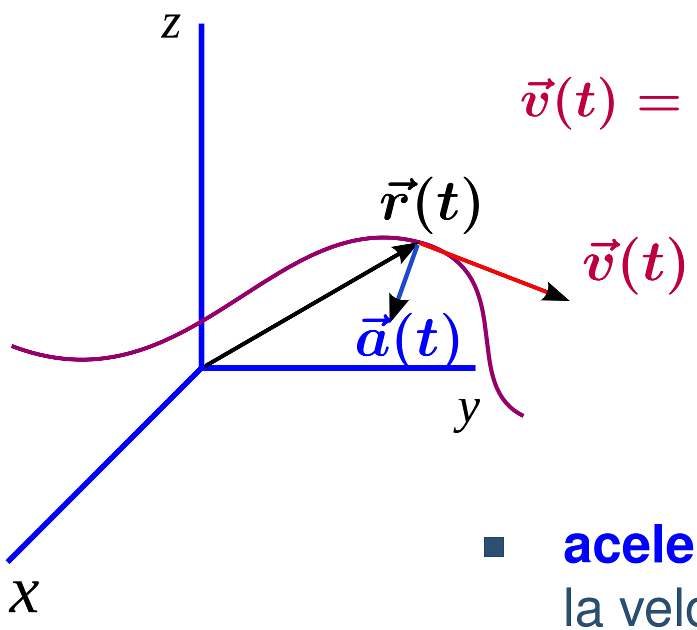
Gráficamente:



- **Velocidad**: razón de cambio de la posición respecto al tiempo:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{d\,x(t)}{dt}, \frac{d\,y(t)}{dt}, \frac{d\,z(t)}{dt}\right)$$

Gráficamente:



- **Velocidad**: razón de cambio de la posición respecto al tiempo:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{d\,x(t)}{dt}, \frac{d\,y(t)}{dt}, \frac{d\,z(t)}{dt}\right)$$

- **aceleración**: razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(\frac{d\,v_x(t)}{dt}, \frac{d\,v_y(t)}{dt}, \frac{d\,v_z(t)}{dt}\right)\\ &= \left(\frac{d^2\,x(t)}{dt^2}, \frac{d^2\,y(t)}{dt^2}, \frac{d^2\,z(t)}{dt^2}\right)\end{aligned}$$

Algunas propiedades de la derivada

$$\frac{[f(x)+g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{[d\,k\,f(x)]}{dx} = k\frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{[d\,f(x)g(x)]}{dx} = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$ regla de la cadena

Algunas fórmulas de derivación

$$\frac{d\,x^n}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{d\,e^x}{dx} = e^x$$

$$\frac{d\ln x}{dx} = 1/x$$

$$\frac{d\,\mathrm{sen}\,x}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\,\mathrm{sen}\,x$$

Algunas propiedades de la integral

Sea

$$F(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

entonces:

$$\int F(x)dx = f(x) + C$$ integral indefinida

Además:

$$\int_a^b F(x)dx = f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$$ integral definida

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int [kf(x)]dx = k\int f(x)dx$$

Algunas fórmulas de integración

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

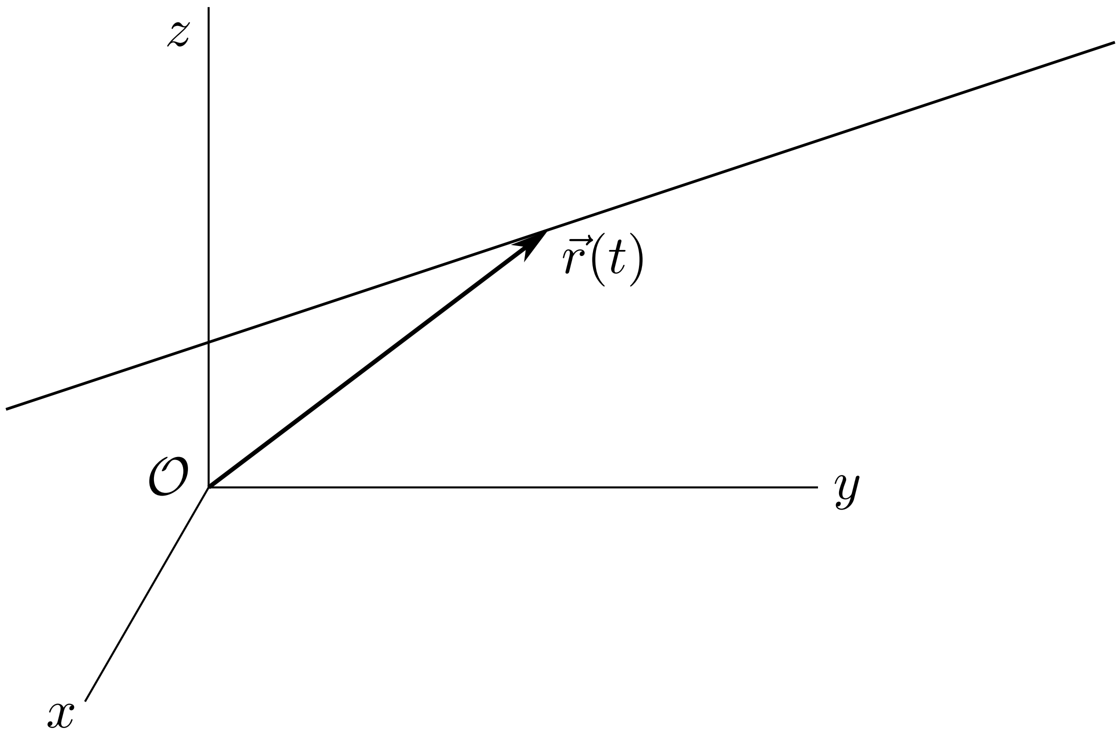
$$\int [1/x]\,dx = \ln x + C$$

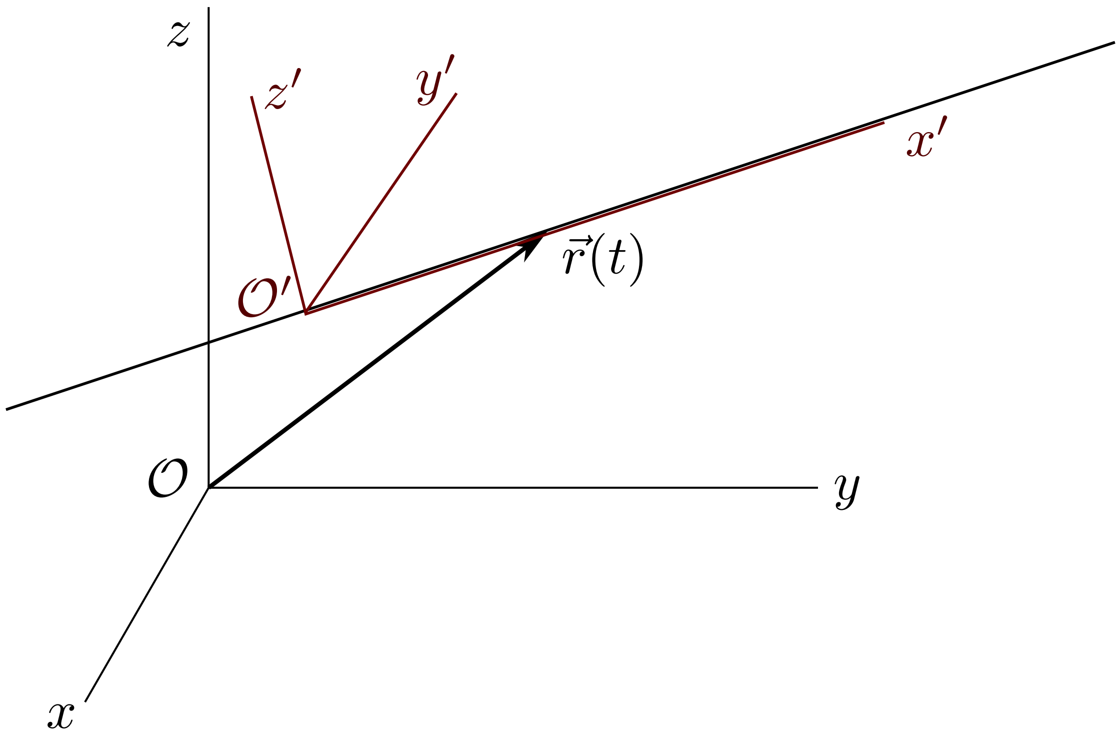
$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

:q

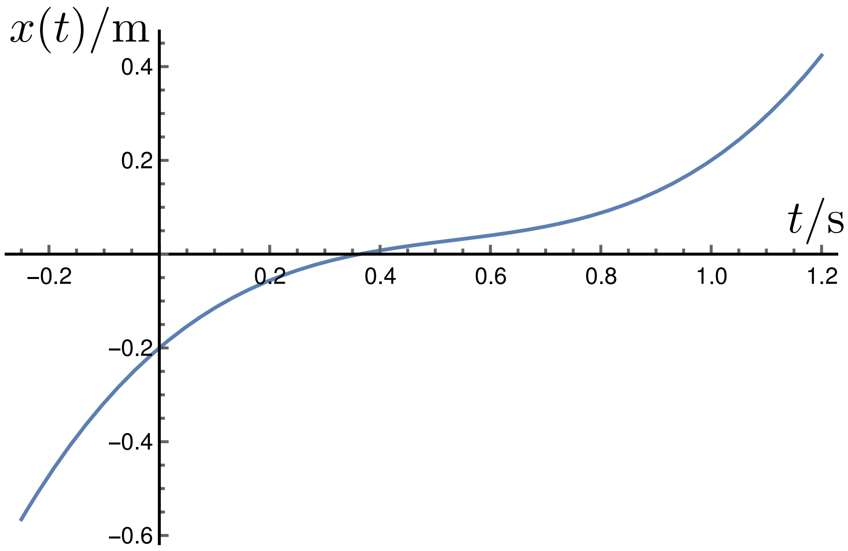
Movimiento en una dimensión





$$\downarrow$$

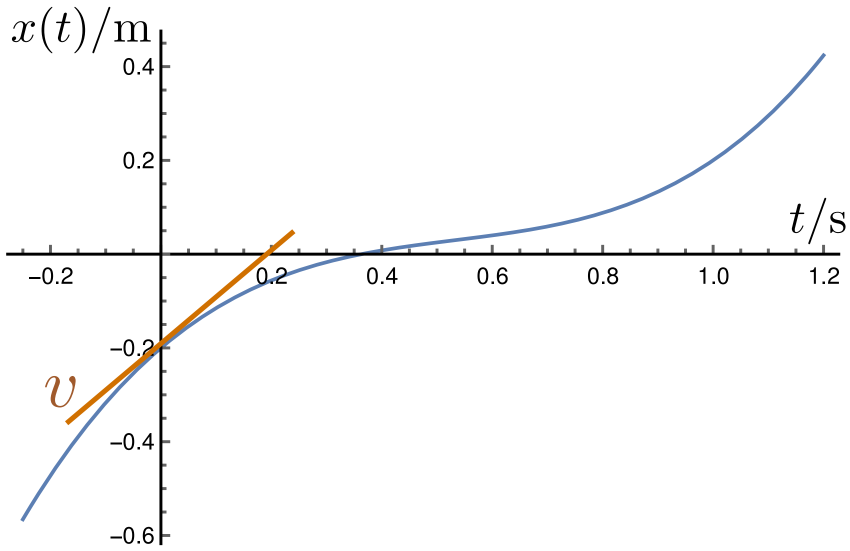
Ejemplo:



$$x(t) = t^3 - 1.6t^2 + t - 0.2$$

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} \\ a(t) &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned}}$$

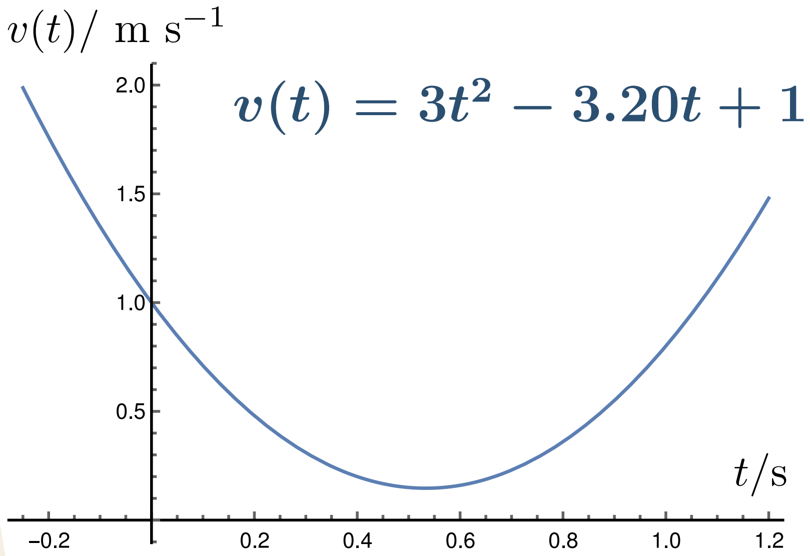
Ejemplo:



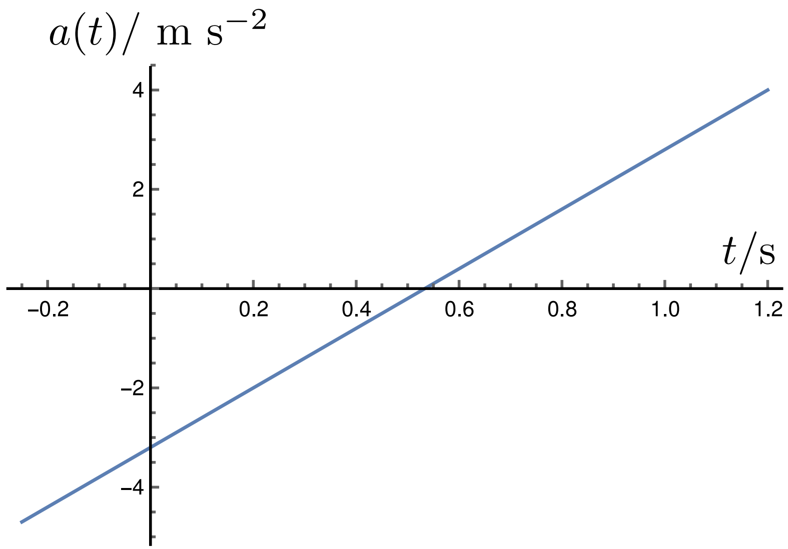
$$x(t) = t^3 - 1.6t^2 + t - 0.2$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

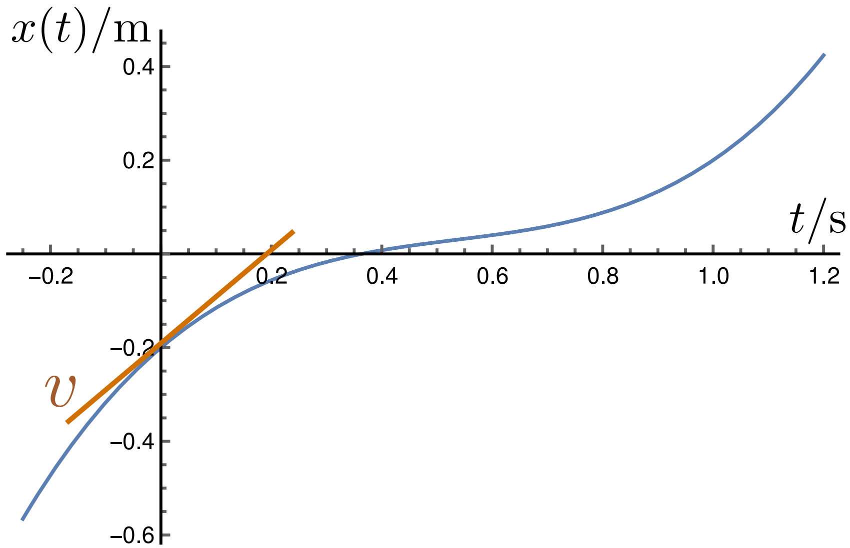
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$



$$v(t) = 3t^2 - 3.20t + 1$$



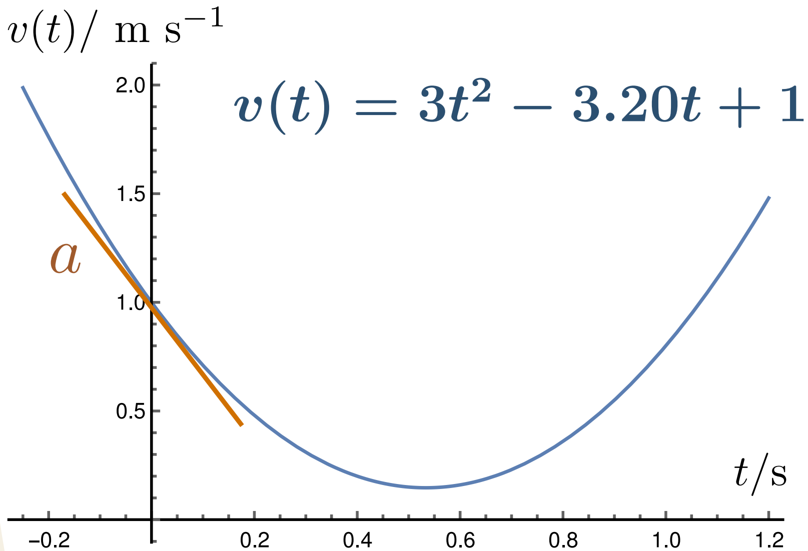
Ejemplo:



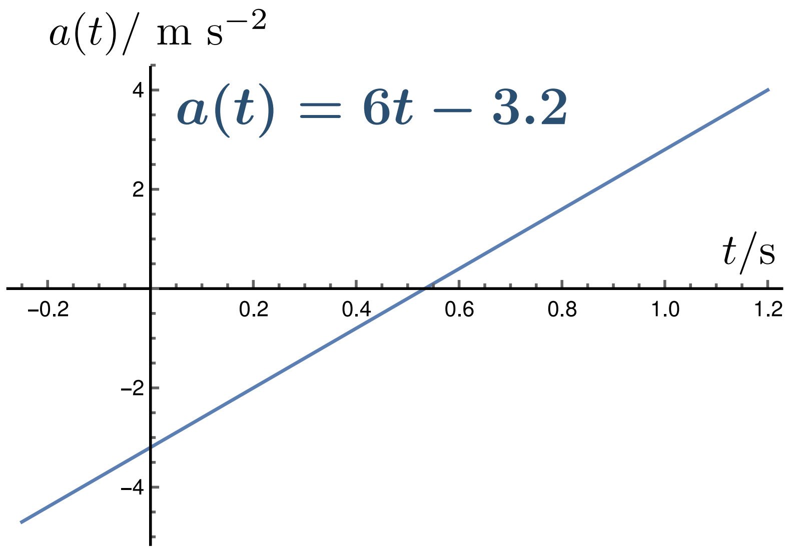
$$x(t) = t^3 - 1.6t^2 + t - 0.2$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$



$$v(t) = 3t^2 - 3.20t + 1$$



$$a(t) = 6t - 3.2$$

Movimiento rectíneo uniforme.

En este caso, la velocidad es constante:

$$v = v_0$$

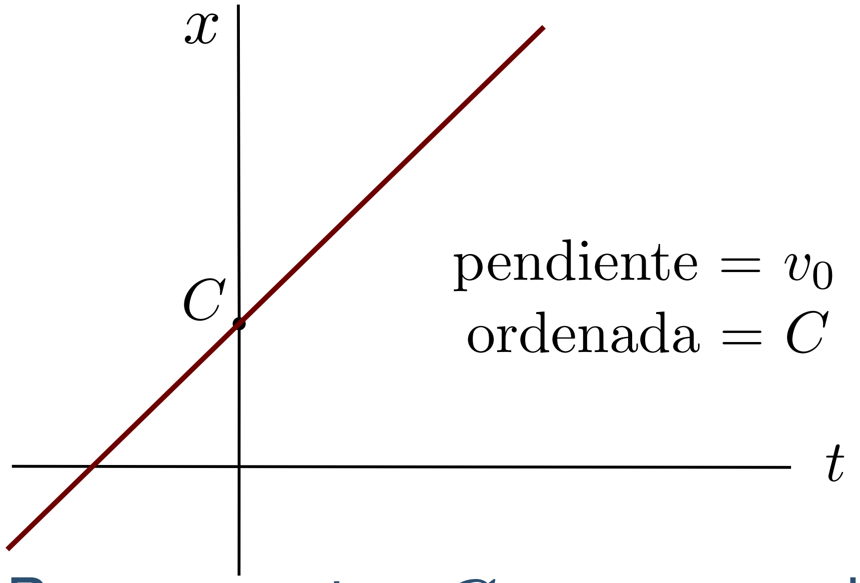
En consecuencia:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0$$

Al integrar:

$$\int dx = \int v_0 dt; \quad x = v_0 \int dt$$

$$x = v_0 t + C$$



pendiente $= v_0$
ordenada $= C$

$$x = v_0 t + C$$

Para encontrar C, es necesaria una **condición inicial**:

$$x(t_0) = x_0$$

Por lo tanto:

$$x_0 = v_0\, t_0 + C; \quad C = x_0 - v_0\, t_0$$

$$x = v_0\, t + x_0 - v_0\, t_0$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0)$$

Sea $x(t_1) = x_1$:

$$x_1 = x_0 + v_0(t_1 - t_0)$$
$$x_1 - x_0 = v_0(t_1 - t_0)$$

Desplazamiento: $\Delta x = x_1 - x_0$.

☞ *El desplazamiento no es lo mismo que la distancia*

Por lo tanto:

$$v_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

donde $\Delta t = t_1 - t_0$.

Además:

$$a = \frac{dv}{dt} = 0$$

Movimiento uniformemente acelerado

En este caso, la aceleración es constante:

$$a = a_0$$

Debido a que

$$a_0 = \frac{dv}{dt}$$

entonces

$$\int dv = \int a_0 dt = a_0 \int dt$$

$$v = a_0 t + C_1$$

Utilizar la condición inicial:

$$v(t_0) = v_0$$

Por lo que

$$v_0 = a_0 t_0 + C_1; \quad C_1 = v_0 - a_0 t_0$$

$$v(t) = a_0 t + v_0 - a_0 t_0$$

$$v(t) = v_0 + a_0 (t - t_0)$$

☞ *La velocidad es una función lineal del tiempo.*

Además:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

entonces

$$\int dx = \int v dt = \int [v_0 + a_0(t - t_0)] dt$$
$$= \int v_0 dt + a_0 \int t dt - a_0 t_0 \int dt$$

$$x = v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2 - a_0 t_0 \, t + C_2$$

Utilizar la condición inicial:

$$x(t_0) = x_0$$

Entonces:

$$x_0 = v_0 t_0 + \frac{a_0}{2} t_0^2 - a_0 t_0^2 + C_2$$

$$C_2 = x_0 - v_0 t_0 - \frac{a_0}{2} t_0^2 + a_0 t_0^2$$

Sustituir en

$$x = v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2 - a_0 t_0 \, t + C_2$$

$$\begin{aligned} x(t) = \; & v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2 - a_0 t_0 \, t \\ & + x_0 - v_0 t_0 - \frac{a_0}{2} t_0^2 + a_0 t_0^2 \end{aligned}$$

Entonces:

$$x_0 = v_0 t_0 + \frac{a_0}{2} t_0^2 - a_0 t_0^2 + C_2$$

$$\begin{aligned} C_2 &= x_0 - v_0 t_0 - \frac{a_0}{2} t_0^2 + a_0 t_0^2 \\ &= x_0 - v_0 t_0 + \frac{a_0}{2} t_0^2 \end{aligned}$$

Sustituir en

$$x = v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2 - a_0 t_0\, t + C_2$$

$$\begin{aligned} x(t) = \quad & v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2 - a_0 t_0\, t \\ & + x_0 - v_0 t_0 + \frac{a_0}{2} t_0^2 \end{aligned}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{a_0}{2} [t^2 - 2 t_0 t + t_0^2]$$

Por lo tanto:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a_0}{2}(t - t_0)^2$$

☞ *La posición es una función cuadrática del tiempo.*

Otra relación útil se obtiene a partir de

$$\Delta x = v_0(t - t_0) + \frac{a_0}{2}(t - t_0)^2$$

y

$$v - v_0 = a_0(t - t_0); \quad t - t_0 = \frac{v - v_0}{a_0}$$

Tarea:

A partir de las expresiones anteriores, obtener:

$$2a_0\Delta x = v^2 - v_0^2$$

Movimiento en 2 dimensiones

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x(t)\,\hat{\imath} + v_y(t)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x(t)\,\hat{\imath} + a_y(t)\,\hat{\jmath}$$

Condiciones iniciales:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \qquad \vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$$

Movimiento con velocidad constante:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\,\hat{\imath} + v_{0y}\,\hat{\jmath} = \frac{dx}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\jmath}$$

Sujeto a

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) = x_0\,\hat{\imath} + y_0\,\hat{\jmath}$$

Por lo tanto:

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x} \qquad \Rightarrow \qquad x = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_{0y} \qquad \Rightarrow \qquad y = y_0 + v_{0y}(t - t_0)$$

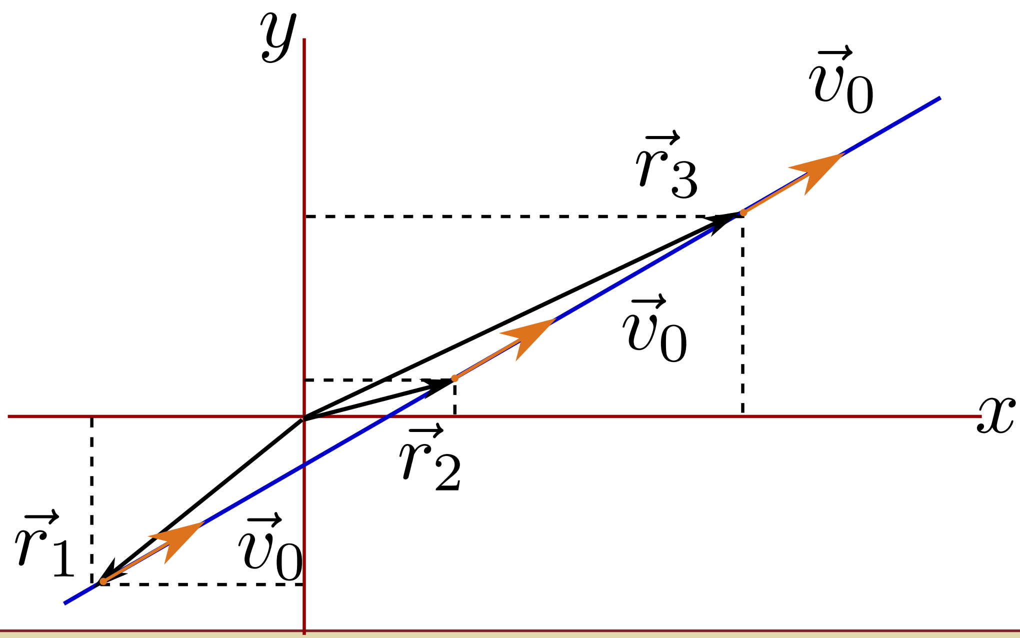
Además:

$$t - t_0 = \frac{x - x_0}{v_{0x}} = \frac{y - y_0}{v_{0y}}$$

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) = y - y_0$$

$$y = \left[\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right] x + \left\{y_0 - \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x_0\right\}$$

Ecuación de una recta



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} = \vec{0}$$

Movimiento circular uniforme

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} = R[\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}(\omega t)\,\hat{\jmath}]$$

Por lo tanto:

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{R}, \qquad \mathrm{sen}(\omega t) = \frac{y}{R}$$

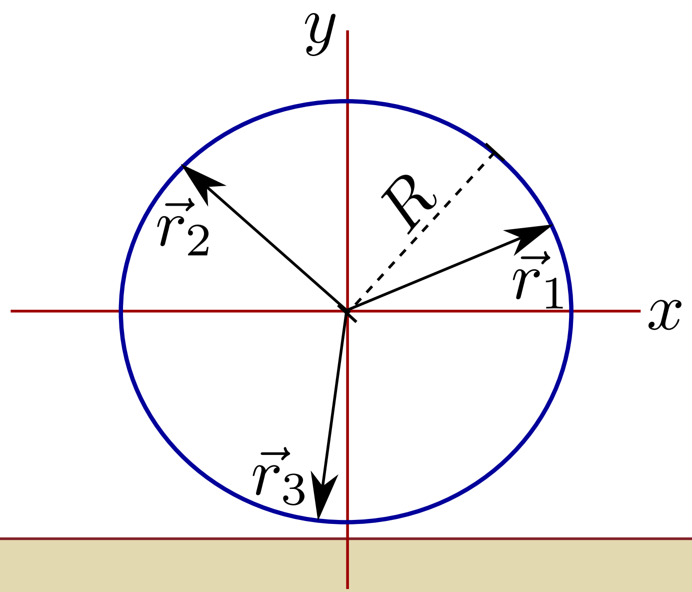
Dado que

$$\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha = 1$$

entonces:

$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1$$

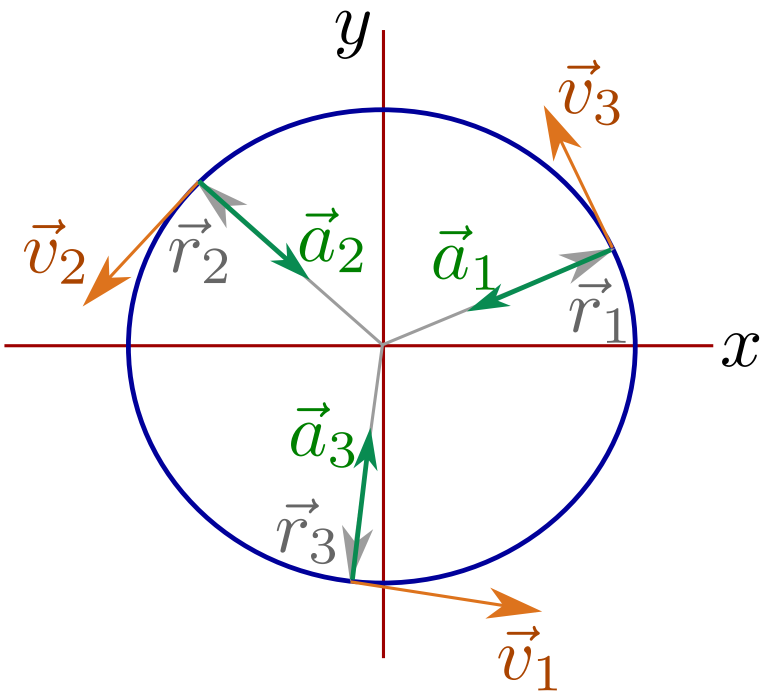
$$x^2 + y^2 = 1$$



Además:

$$\vec{v}(t) = R\omega[-\operatorname{sen}(\omega t)\,\hat{\imath} + \cos(\omega t)\,\hat{\jmath}]$$
$$\vec{a}(t) = -R\omega^2[\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}(\omega t)\,\hat{\jmath}]$$

Ejercicio: Obtén $\vec{v} \cdot \vec{a}$.



Movimiento uniformemente acelerado

$$\vec{a}_0 = a_{0x}\,\hat{\imath} + a_{0y}\,\hat{\jmath}$$

Sujeto a

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \quad \vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$$

Dado que:

$$a_{0x}\,\hat{\imath} + a_{0y}\,\hat{\jmath} = \frac{dv_x}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{\jmath}$$

entonces:

$$\frac{dv_x}{dt} = a_{0x} \qquad \Rightarrow \qquad v_x = v_{0x} + a_{0x}(t - t_0)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = a_{0y} \qquad \Rightarrow \qquad v_y = v_{0y} + a_{0y}(t - t_0)$$

Por lo tanto:

$$\vec{v}(t) = [v_{0x} + a_{0x}(t - t_0)]\,\hat{\imath} + [v_{0y} + a_{0y}(t - t_0)]\,\hat{\jmath}$$

De manera equivalente:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0(t - t_0)$$

Adicionalmente, dado que

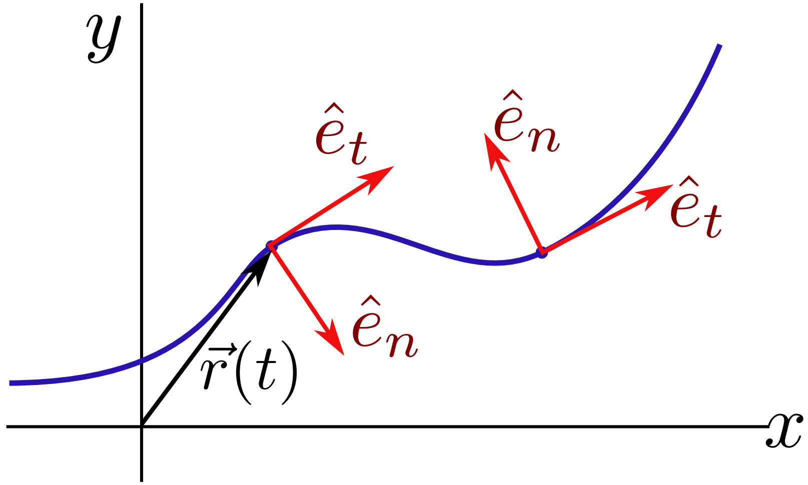
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0(t - t_0)$$

se obtiene:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{\vec{a}_0}{2}(t - t_0)^2$$

Componentes tangencial y normal de $\vec{v}$ y $\vec{a}$

Vectores base



$$||\hat{e}_t|| = ||\hat{e}_n|| = 1$$
$$\hat{e}_t \cdot \hat{e}_n = 0$$

Velocidad.

$$\vec{v} = v_t\, \hat{e}_t \tag{3}$$

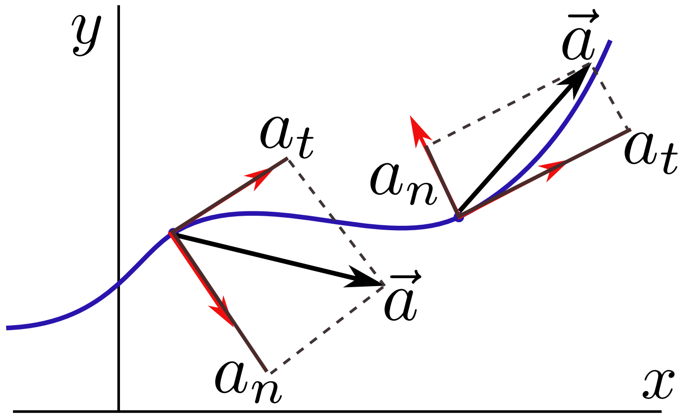
donde

$$v_t = v = ||\vec{v}|| \tag{4}$$

Además

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{5}$$

s: *longitud de arco*



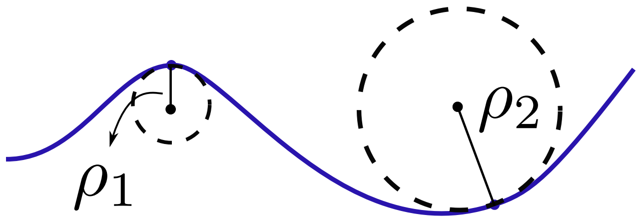
Aceleración.

$$\vec{a} = a_t\,\hat{e}_t + a_n\hat{e}_n \tag{6}$$

donde

$$a_t = \frac{dv}{dt} \tag{7}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{8}$$



Ejemplo: Movimiento rectilíneo.

- Entre mayor sea el radio de curvatura, más se acerca a una recta una trayectoria.
- En el límite de una recta, el radio de curvatura tiende a infinito. Por lo tanto ec. (6):

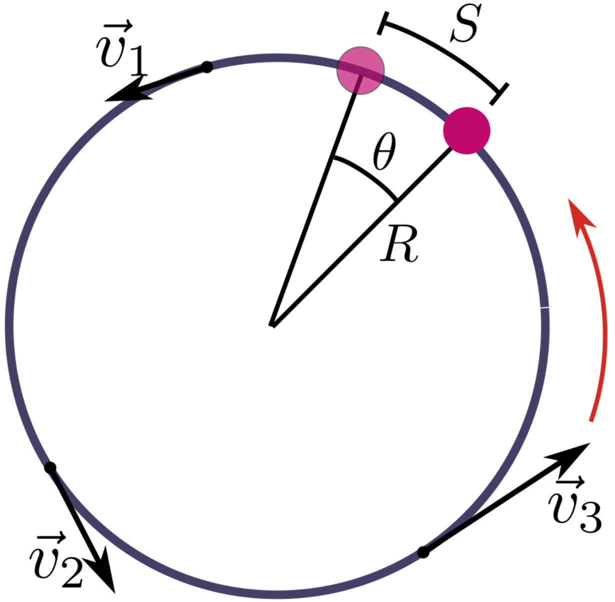
$$a_n = 0,$$

por lo que, de acuerdo con (4):

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t$$

- Este resultado implica que los vectores velocidad [ec. (1)] y aceleración son colineales.

Movimiento circular



Se cumple:

$$\theta = \frac{S}{R}$$

Por lo tanto:

$$S = R\,\theta$$

El radio de curvatura, R, es constante

La rapidez es la derivada del arco con respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dS}{dt} = \frac{d[R\theta]}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

Rapidez angular

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \tag{9}$$

Por lo tanto:

$$v(t) = R\,\omega(t) \tag{10}$$

Componente tangencial de la aceleración. Se sustituye (8) en (5):

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d[R\,\omega]}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \tag{11}$$

aceleración angular

$$\alpha(t) = \frac{d\,\omega(t)}{dt} \tag{12}$$

De (7) y (10):

$$\alpha(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{13}$$

Además, al sustituir (10) en (9):

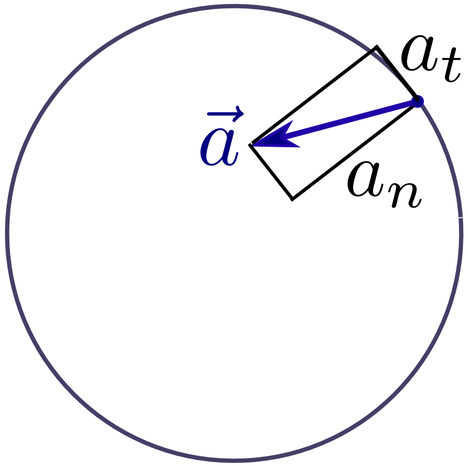
$$a_t(t) = R\,\alpha(t) \tag{14}$$

Componente normal de la aceleración. Dado que $\rho = R$, (6) es:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

y debido a (8):

$$a_n(t) = R\,[\omega(t)]^2 \qquad (15)$$



a_n: aceleración centrípeta

Ejemplo: Movimiento circular uniforme.

En este caso:

$$\omega = \text{constante}$$

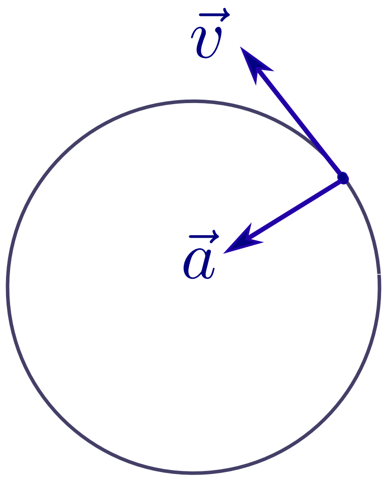
Por lo tanto:

$$v = R\omega$$

constante.

En consecuencia:

$$\alpha = 0$$
$$a_t = 0$$



Estos resultados son consistentes con las diapositivas 37–38 para el caso $\omega = $ constante en la base $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$.