Física I: Oscilador armónico

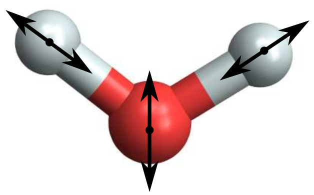
Jesús Hernández Trujillo
Facultad de Química, UNAM

- **Movimiento oscilatorio:** Una partícula describe un movimiento oscilatorio (vibracional) cuando se mueve alrededor de una posición llamada **punto de equilibrio**.

- **Deformación de materiales:** Un cuerpo elástico se deforma cuando se le aplica una fuerza.

Ejemplos:

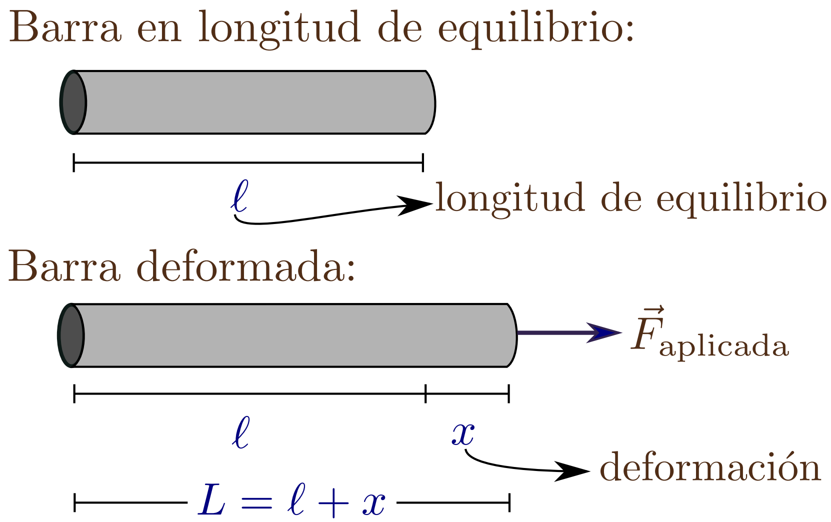
1. Los átomos en una molécula vibran alrededor de sus posiciones de equilibrio.



Estas oscilaciones moleculares pueden estudiarse experimentalmente.

2. Una barra se deforma cuando se le aplica una fuerza, $\vec{F}_{\text{aplicada}}$.

Ej.: una fibra polimérica



Como respuesta, la barra opone una **fuerza de restitución**:

$$\vec{F}_{\text{restitución}} = -\vec{F}_{\text{aplicada}}$$

La **deformación** del objeto se define como la longitud, L, menos la longitud de equilibrio, ℓ:

$$x = L - \ell$$

En adelante, se usa la notación: $F \equiv F_{\text{restitución}}$.

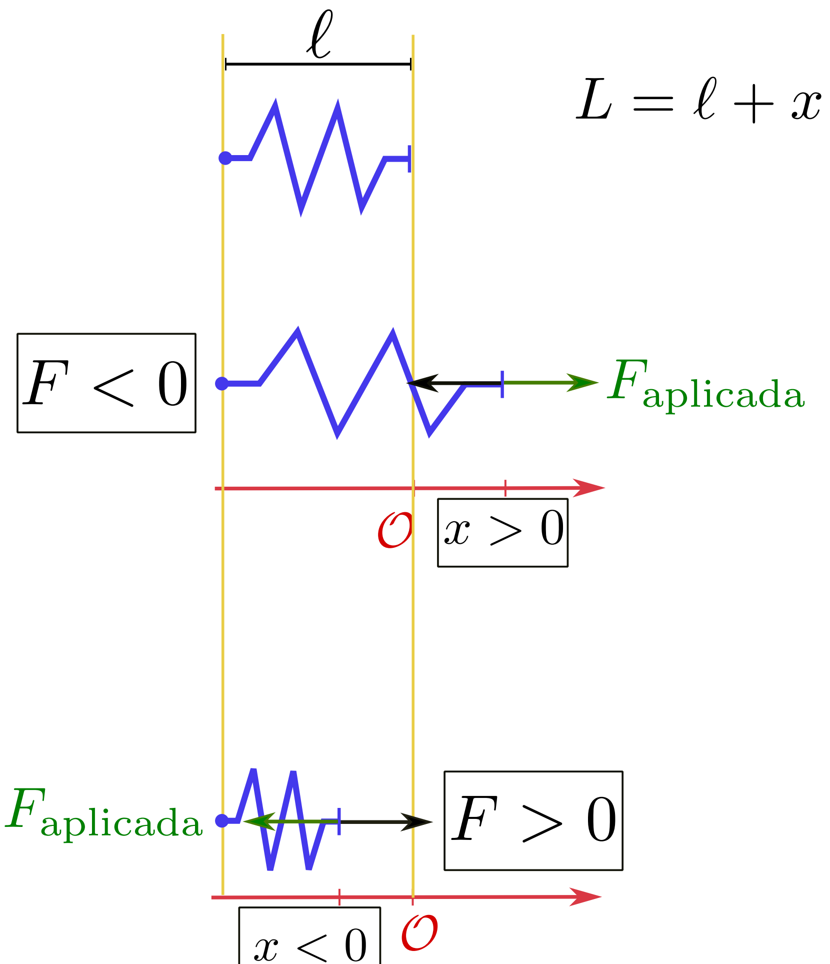
Considera las siguientes situaciones donde se deforma un resorte:

a) Se estira a una longitud mayor que la de equilibrio, $x > 0$:

$$F < 0.$$

b) Se comprime respecto a la longitud de equilibrio, $x < 0$:

$$F > 0.$$



Ley de Hooke:

La fuerza de restitución es directamente proporcional a la deformación:

$$F = -kx\,, \quad k > 0$$

k: **constante de rigidez**; depende de la naturaleza del material y las condiciones en que se encuentre.

Unidades:

$$k\ [=]\ \mathrm{N/m}$$

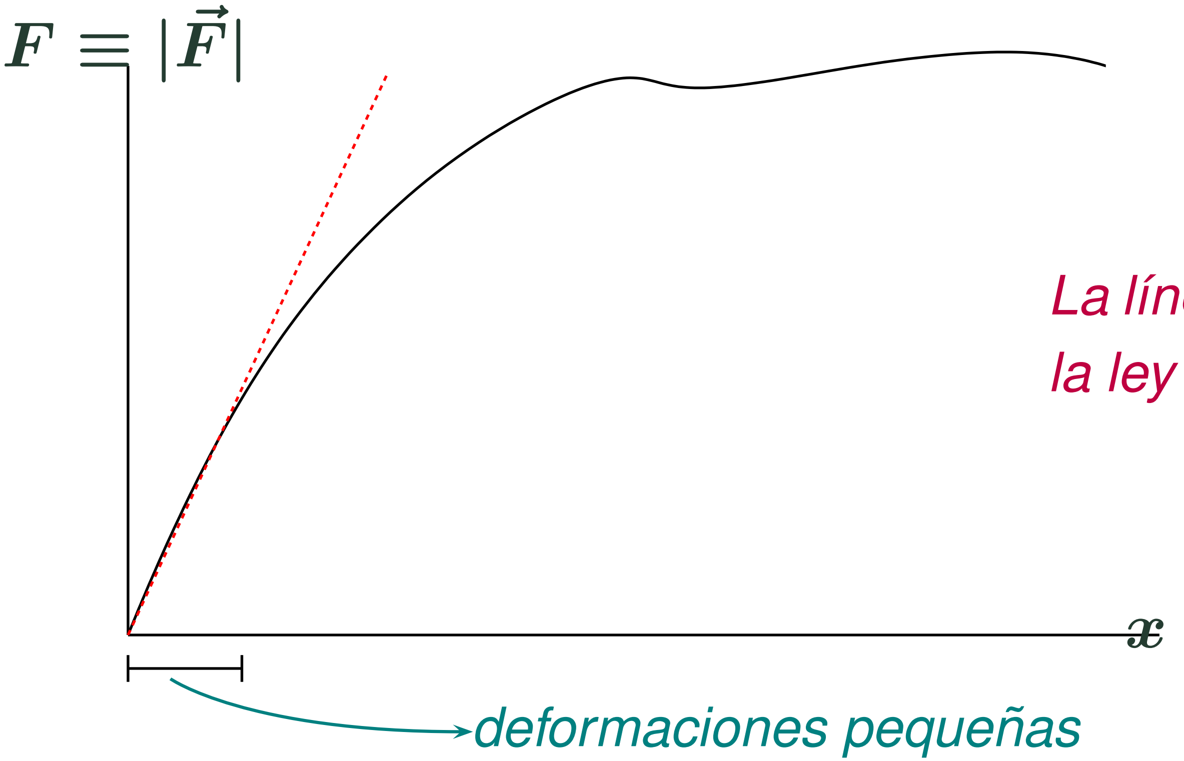
$\Rightarrow$ ***La fuerza de restitución tiene sentido contrario al de la deformación.***

Casos:

- $x < 0, \quad F > 0$: compresión
- $x = 0, \quad F = 0$: equilibrio
- $x > 0, \quad F < 0$: extensión

$\Rightarrow$ La ley de Hooke describe bien la deformación de un material cuando las deformaciones son pequeñas.

Intervalo de validez de la ley de Hooke:



La línea recta representa a la ley de Hooke.

Ejemplos:

1. Una molécula se rompe.
2. Una viga en un puente se rompe.

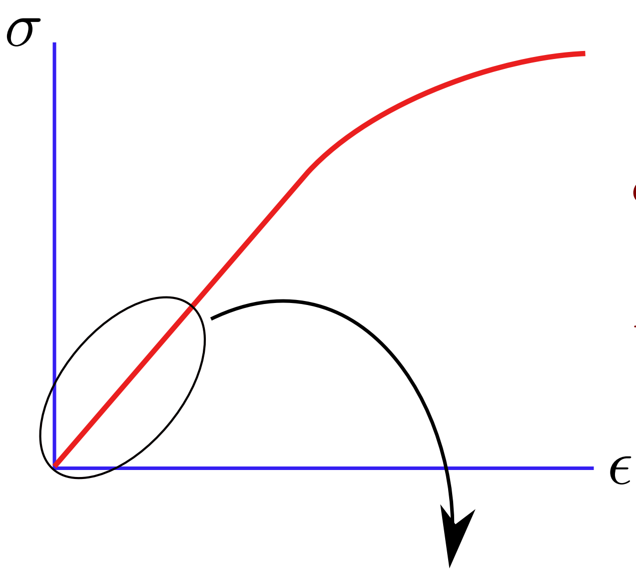
- Esfuerzo y deformación de un sólido:

Barra en longitud de equilibrio: Barra deformada:

ϵ : deformación
σ : esfuerzo
Y : módulo de Young

Una máquina de ensayos de tracción:

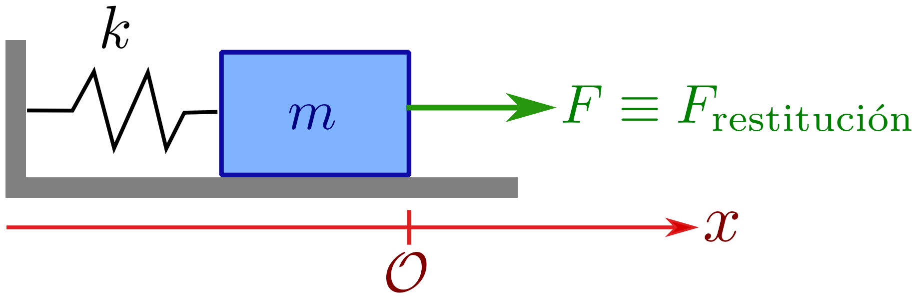
permite medir $\boldsymbol{Y}$

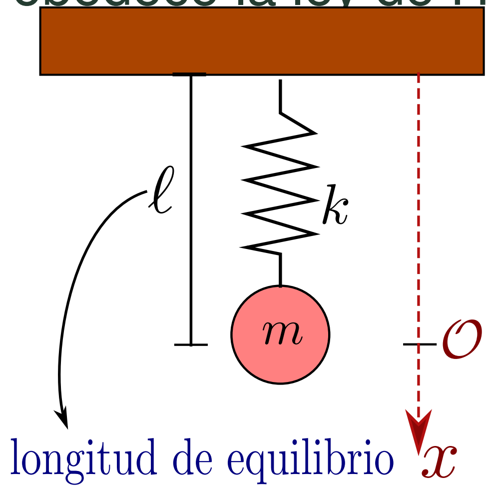


$$\epsilon = \Delta L / L_0$$
$$\sigma = F/A$$
$$Y = \sigma / \epsilon$$

Intervalo de validez del modelo lineal

Un bloque bajo la acción de una fuerza que obedece la ley de Hooke:





La 2a. ley de Newton:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

y ley de Hooke: $F = -kx$,

conducen a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

De igual manera:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x \tag{1}$$

La solución de la ecuación diferencial es

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \tag{2}$$

donde

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la **frecuencia circular o angular**

Unidades:

$$\omega\ [=]\ \mathrm{rad/s} \equiv \mathrm{s}^{-1}$$

La trayectoria (2) describe el **movimiento armónico simple.**

Ejercicio:

Verifica que

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

es solución de (1).

A: Amplitud
ϕ: ángulo de fase

- $x_{\min} = -A$: compresión máxima.
- $x_{\max} = \quad A$: extensión máxima.

$\{A, \phi\}$ son las constantes de integración de la solución general.

Cinemática del movimiento armónico simple.

- posición:

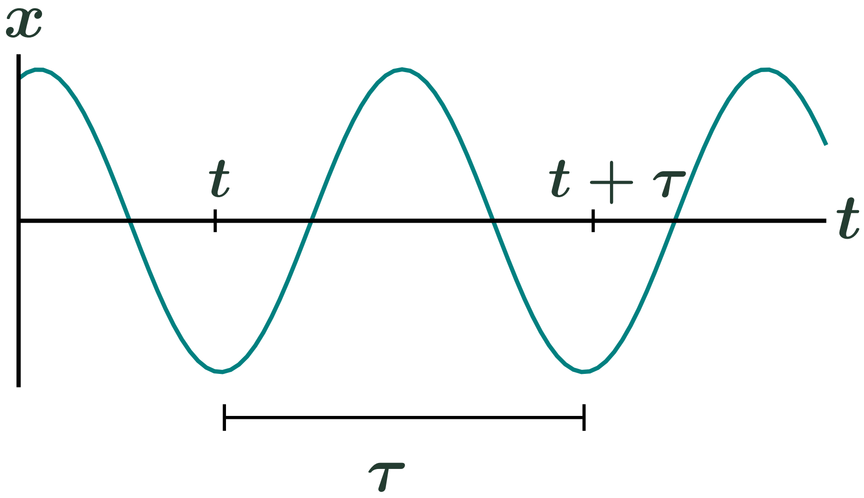
$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

- velocidad:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

- aceleración:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$



$$\mathrm{sen}(\alpha + 2\pi) = \mathrm{sen}(\alpha)$$
$$\Downarrow$$
$$\omega t + \phi + 2\pi = \omega(t+\tau) + \phi$$
$$\Downarrow$$
$$2\pi = \omega\,\tau$$

Definiciones:

Periodo:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}; \qquad \tau\ [=]\ \mathrm{s}$$

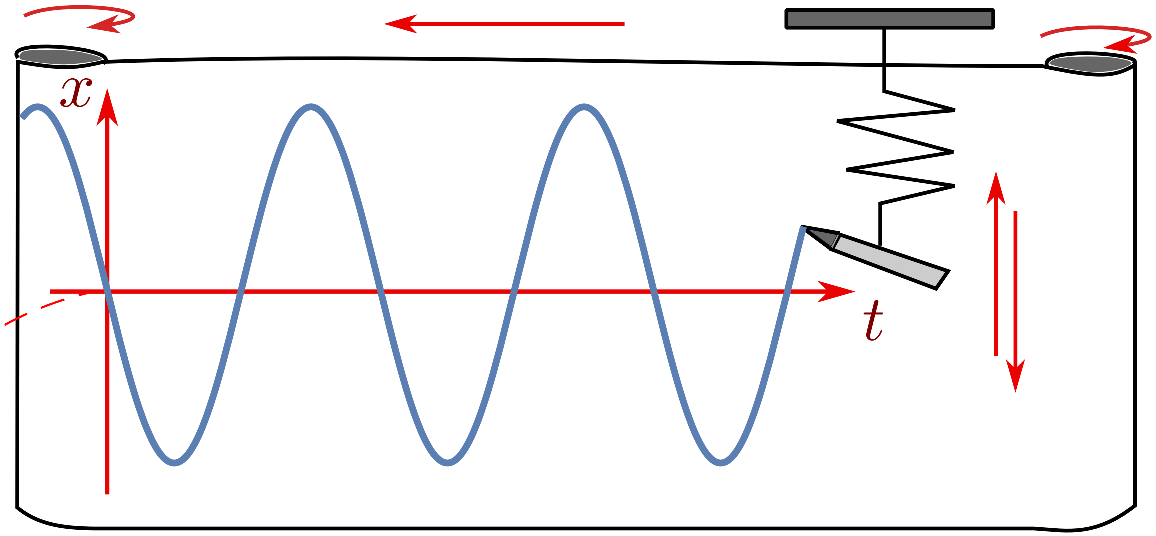
Frecuencia:

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}; \qquad \nu\ [=]\ \mathrm{s}^{-1} \equiv \mathrm{Hz}$$

ω, τ, ν: independientes de A

Un rollo de papel que se desplaza entre dos rodillos:

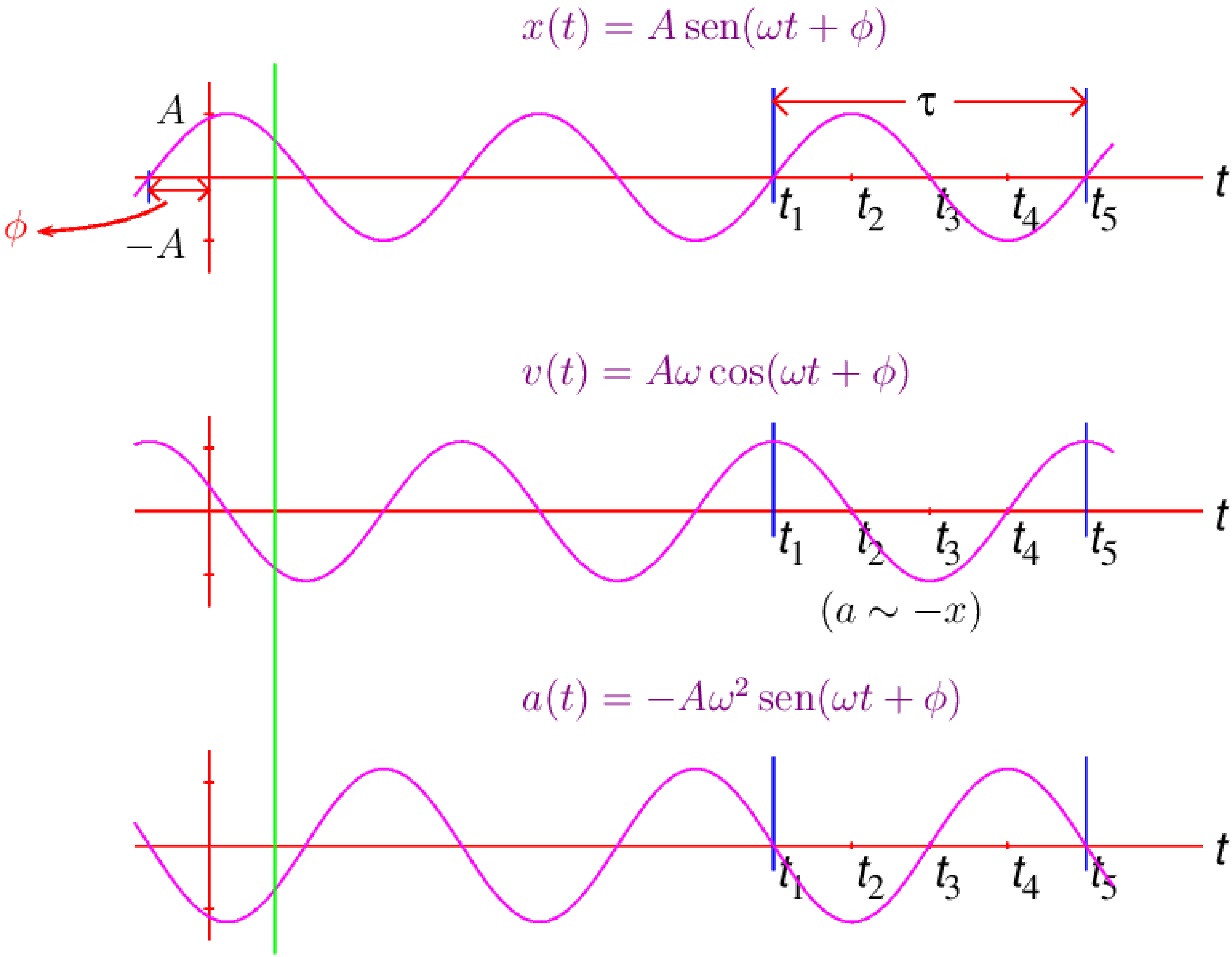
movimiento del papel:



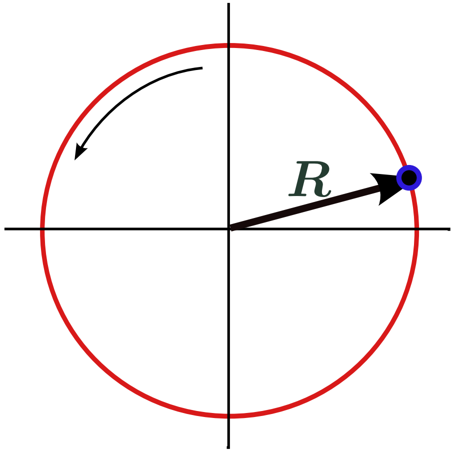
Sistema de coordenadas dibujado en el papel

Un bolígrafo en movimiento armónico simple realiza un trazo sobre el papel.

Ver: https://youtu.be/P-Umre5Np_0


$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$
A
$-A$
ϕ
τ
t
t_1 t_2 t_3 t_4 t_5
$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi)$
t
t_1 t_2 t_3 t_4 t_5
$(a \sim -x)$
$a(t) = -A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$
t
t_1 t_2 t_3 t_4 t_5

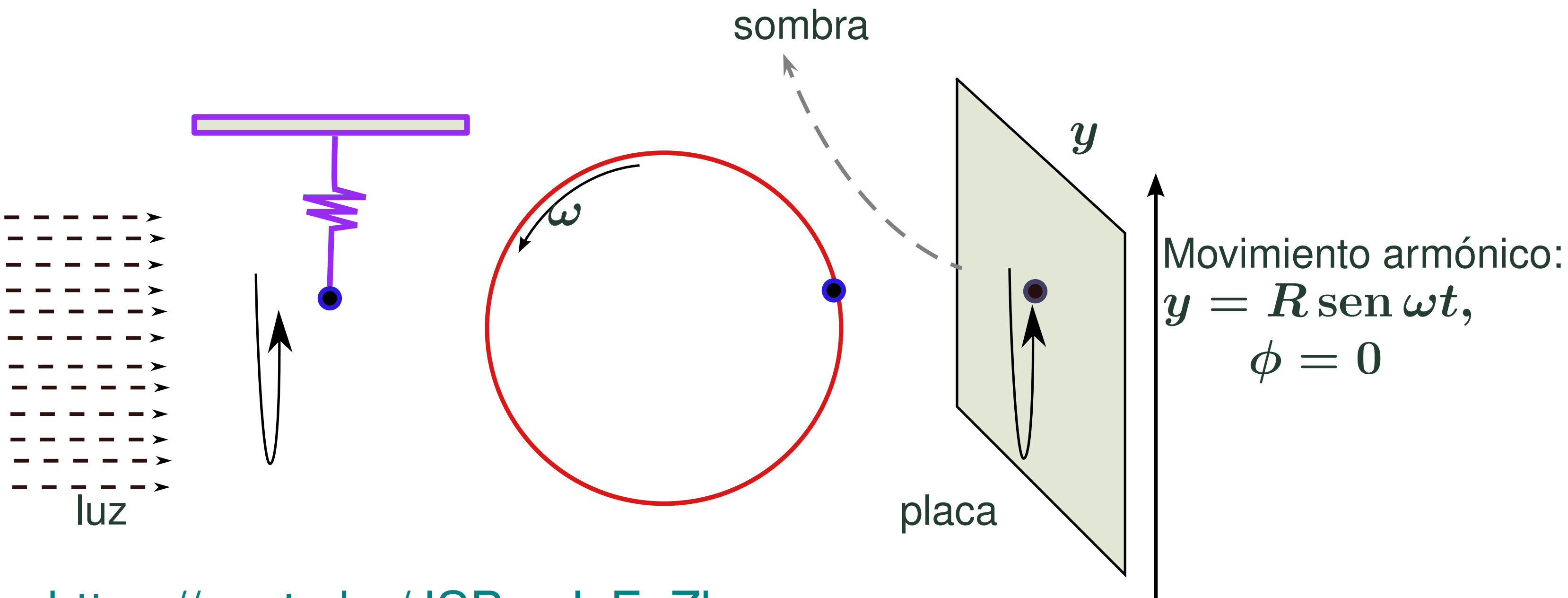
Movimiento armónico simple vs movimiento circular



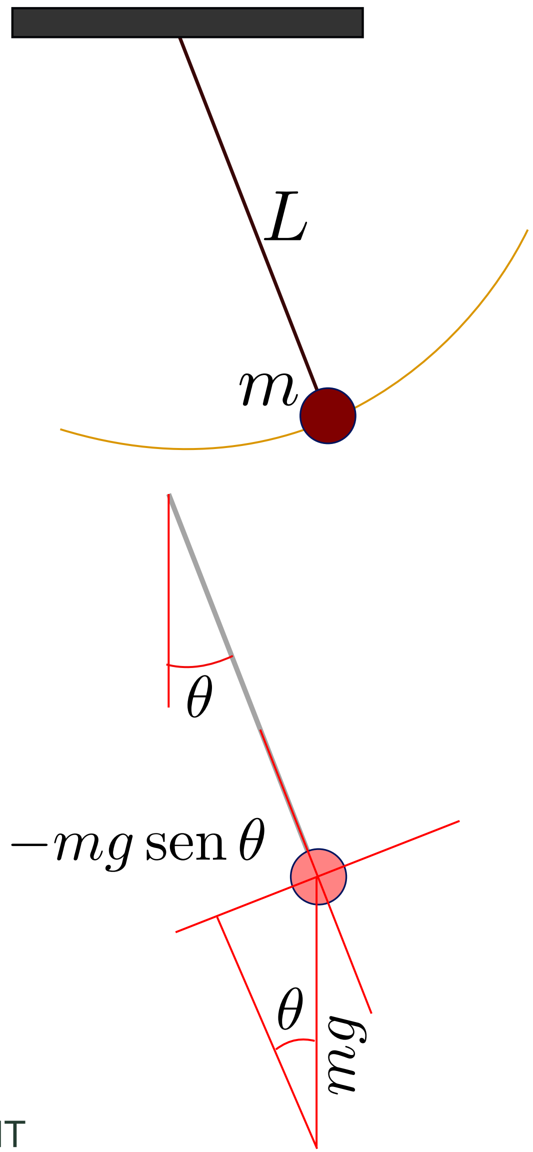
$$\vec{r}(t) = R\cos\omega t\,\hat{\imath} + R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{\jmath}$$

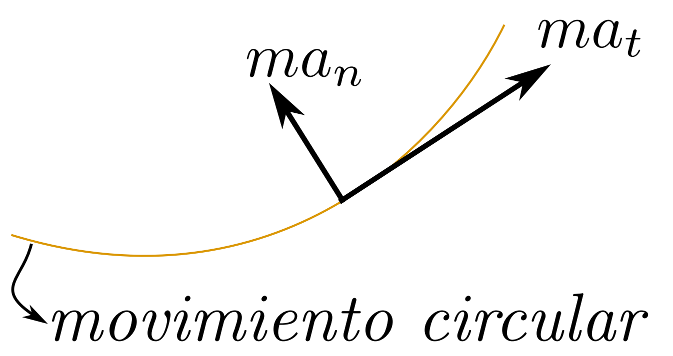
$$\vec{F}(t) = -\omega^2 m\,\vec{r}(t)$$

$$F_y \sim y$$



https://youtu.be/JSBw-JyFgZk





$$a_t = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\ \mathrm{sen}\,\theta$$

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\ \mathrm{sen}\,\theta = 0$$

Para ángulos pequeños: $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0, \qquad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

con solución:

$$\theta = \theta_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

Movimiento oscilatorio con periodo

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Ejercicio:

Calcula el valor de g si un péndulo con longitud de 70 cm tiene un periodo 1.7 s.